Divisor oder Quote?

Zur Mathematik von Mandatszuteilungen bei Verhältniswahlen

Friedrich Pukelsheim

Institut für Mathematik, Universität Augsburg, D-86135 Augsburg

E-Mail Adresse: `Pukelsheim@Uni-Augsburg.De`

Abstrakt: Für die Zuteilungen von Mandaten gemäß den Stimmen, die Parteien in einer Wahl erhalten, und für die Zuteilungen von Ausschußsitzen gemäß den Vertretungsstärken, die Fraktionen in einem Parlament besitzen, sind in der Bundesrepublik Deutschland bisher drei Zuteilungsmethoden angewendet worden: die Divisormethode mit Standardrundung (Sainte-Laguë), die Divisormethode mit Abrundung (d'Hondt) und die Quotenmethode mit Ausgleich nach größten Resten (Hare–Niemeyer). Für solche Zuteilungsmethoden diskutiert der vorliegende Aufsatz Aussagen über Struktur- und Güteeigenschaften, die die Mathematik bereitstellt. Diese Aussagen beruhen nicht auf der Art, wie das Zuteilungsergebnis berechnet wird. Ausschlaggebend ist vielmehr, ob die mit einer Zuteilungsmethode erhaltene Mandatsverteilung eine politisch tragbare Anpassung an die vorliegende Stimmenverteilung liefert. Dabei erweist sich die Sainte-Laguë-Methode wie auch die von Hare–Niemeyer als unverzerrt in dem Sinn, daß bei wiederholter Anwendung keine systematischen Abweichungen zwischen Mandats- und Stimmenverteilung auftreten. Im Gegensatz dazu begünstigt die d'Hondt-Methode größere Parteien auf Kosten kleinerer Parteien, weshalb der Bayerische Verfassungsgerichtshof 1992 ihre Verfassungswidrigkeit festgestellt hat. Andererseits zeigt die Hare–Niemeyer-Methode fatale strukturelle Schwächen, die bei Zutritt einer weiteren Partei, Veränderungen der auf die Parteien entfallenden Stimmen und Vergrößerung der Gesamtzahl der Mandate unannehmbare Verkehrungen der Zuteilungsergebnisse nach sich ziehen (Parteienzuwachs-Paradox, Stimmenzuwachs-Paradox, Mandatszuwachs-Paradox). Die Sainte-Laguë-Methode ist frei von diesen Paradoxien und harmoniert zudem bestens mit dem vom Bundesverfassungsgericht aufgestellten Grundsatz des gleichen Erfolgswerts der Wählerstimmen, gemessen sowohl mit dem Unterschied zwischen den Erfolgswerten zweier Wählerstimmen als auch mit der Summe der Abweichungsquadrate des Erfolgswertes aller Wählerstimmen vom idealen Erfolgswert. Anhand des Überhangmandatsurteils von 1997 wird verdeutlicht, daß der etablierte Grundsatz des gleichen Erfolgswerts der Wählerstimmen und der denkbare Grundsatz der gleichen Repräsentationsquote der Mandate zu vollkommen gegensätzlichen Entscheidungen führen können.

1991 Mathematics Subject Classifications: 60C05, 62P25, 65G05.

---

1. *Einleitung*

Nach einer Wahl muß das Stimmenergebnis so gut wie möglich in Mandate verrechnet werden. Die Schlüsselwörter hier sind "gut" und "möglich". Gesamtgesellschaftliche, politikwissenschaftliche und verfassungsrechtliche Anforderungen bestimmen die Güteanforderungen, denen ein Verrechnungsverfahren genügen soll. Was in diesem Rahmen möglich ist, dazu kann die Mathematik einen Beitrag leisten.[1]

Für die Vielzahl der Zuteilungsmethoden, die es gibt, entwickelten *Michel L. Balinski / H. Peyton Young* 1982 eine mathematische Theorie, die sich auf umfangreiche Studien zur Sitzzuteilung in der 200jährigen Geschichte des US-amerikanischen Repräsentantenhauses stützt.[2] Wir konzentrieren uns auf die drei Methoden, die im Verlauf der jungen Geschichte der Bundesrepublik Deutschland Verwendung gefunden haben und mit den Namen Sainte-Laguë, d'Hondt und Hare–Niemeyer verbunden sind.[3]

Die Etikettierung von Zuteilungsmethoden mit Personennamen ist ein Paradebeispiel für *Stiglers Gesetz zur Namensgebung*: "Keine wissenschaftliche Entdeckung trägt den Namen ihres eigentlichen Entdeckers."[4] Die d'Hondt-Methode wurde schon 1792 von *Thomas Jefferson* vertreten; in Europa ist sie auch unter dem Namen *Hagenbach-Bischoff* bekannt. Der zeitgleiche Gegenvorschlag von *Alexander Hamilton* ist unsere heutige Methode von Hare–Niemeyer; sie wurde 1850 von *Samuel F. Vinton* wiederentdeckt. Die Methode nach Sainte-Laguë geht auf *Daniel Webster* (1832) zurück; im Deutschen Bundestag wird sie

---

[1] Dieser Aufsatz entstand aus einem interdisziplinären Hauptseminar über *Wahlverfahren in der Demokratie*, das Professor Dr. *Rainer-Olaf Schultze* und ich im Wintersemester 1997–98 für Studierende der Politikwissenschaften und Mathematik an der Universität Augsburg veranstalteten.

[2] Ihre Monographie [1] ist bahnbrechend: Die ersten 90 Seiten bieten einen faszinierenden Rückblick, welche Erfahrungen in der US-amerikanischen Parlamentsgeschichte gewonnen wurden. Die zweiten 90 Seiten entwickeln Schritt für Schritt die Theorie, die sich aus diesen historischen Erfahrungen ableitet. Eine Kurzfassung findet man in [13, 14]. Siehe auch *William F. Lucas* [33].

[3] *Jean-André Sainte-Laguë*, * 20. April 1882, † 18. Januar 1950. Gymnasiallehrer der Mathematik in Evreux, Douai, Besançon ([60], S. 2941), Neuilly-sur-Seine. *Maître de Conférence*, ab 1938 Professor für Angewandte Mathematik am *Conservatoire National des Arts et Métiers* in Paris; über Leben und Werk berichtet *Harald Gropp* [22].—*Victor d'Hondt*, * 10. November 1841, † 30. Mai 1901. Professor der Rechtswissenschaften an der Universität Gent ([49], S. 672).—*Thomas Hare*, * 28. März 1806, † 6. Mai 1891. Rechtsanwalt und *Inspector of Charities* in London ([50], S. 852).—*Horst Niemeyer*, * 30. Juni 1931. Professor für Mathematik an der Universität Marburg und der Rheinisch–Westfälischen Technischen Hochschule Aachen ([61], S. 140).— Im Datenhandbuch des Deutschen Bundestages [54], S. 705, heißen diese Methoden Höchstzahlverfahren (d'Hondt), Mathematisches Proportionsverfahren (Hare/Niemeyer) und Proportionalverfahren (Sainte-Laguë/Schepers).—Siehe auch die zahlreichen historischen Bezüge und Quellennachweise in *Klaus Kopfermann* [3].—Es existieren Zuteilungsmethoden, die weder Divisor- noch Quotenmethoden sind und wohl nur von akademischem Interesses sein dürften (etwa *Michel L. Balinski / H. Peyton Young* [11], *Donald G. Saari* [7], S. 317).

[4] "No scientific discovery is named after its original discoverer." Siehe *Stephen M. Stigler* [45]. Stiglers Gesetz trifft auch auf sich selbst zu. Es ist eine Hommage an *Robert K. Merton* und seine brillanten wissenschaftssoziologischen Studien wie *On the Shoulders of Giants* [4].

mit dem Namen *Hans Schepers* verbunden.[5] Und so weiter.[6]

Wir setzen mit unseren Untersuchungen zu dem Zeitpunkt ein, wenn festgestellt ist, daß nach Überwindung etwaiger Sperrklauseln p Parteien für eine Mandatszuteilung verbleiben. Die auf die Parteien $1, \ldots, p$ entfallenden gültigen Stimmen bezeichnen wir mit $s_1, \ldots, s_p$. Die *Gesamtzahl der zuteilungsrelevanten Stimmen* ist dann

$$s_1 + \cdots + s_p = S.$$

Es stehen M Mandate zur Verfügung. Die den Parteien zuzuteilenden Mandatsanzahlen $m_1, \ldots, m_p$ sind so zu bestimmen, daß alle verfügbaren Mandate vergeben werden:

$$m_1 + \cdots + m_p = M.$$

Es folgt ein kurze Zusammenfassung der Abschnitte der vorliegenden Arbeit. Die zwei wichtigsten Klassen von Zuteilungsmethoden sind Divisormethoden, darunter die von Sainte-Laguë (Abschnitt 2) und die von d'Hondt (3), und Quotenmethoden, darunter die von Hare–Niemeyer (4). Eine Mandatszuteilung, die mit einer Divisormethode berechnet wird, läßt sich besonders leicht überprüfen (5). Verhältniswahlen zielen darauf ab, daß die Verteilung der Mandate sich an die Verteilung der Stimmen anpaßt (6). Insbesondere dürfen keine systematische Verzerrungen auftreten. Diese Forderung der Unverzerrtheit wird von der Sainte-Laguë-Methode erfüllt (7). Die d'Hondt-Methode ist verzerrt und bevorzugt regelmäßig größere Parteien auf Kosten kleinerer (8). Dies wird auch in der Rechtsprechung anerkannt (9).

Darüberhinaus müssen politisch akzeptable Methoden ein vernünftiges Verhalten zeigen, wenn mehr oder weniger Parteien sich für die Mandatszuteilung qualifizieren (10), eine Partei mehr Stimmen zugewinnt als eine andere (11) oder die Anzahl der zu vergebenden Mandate wächst (12). Die Methode von Hare–Niemeyer verhält sich in allen drei Fällen so widersinnig und paradox, daß sie ausscheidet. Auch daß sie jeder Partei soviele Mandate zuteilt, wie es dem auf- oder abgerundeten Idealanspruch entspricht, ist für alle Beteiligten eher von Nachteil (13).

Das Bundesverfassungsgericht hat dem gleichen Erfolgswert der Wählerstimmen einen beherrschenden Wert zuerkannt (14). Dieser Grundsatz schließt von den unendlich vielen

[5] *Michel L. Balinski / H. Peyton Young* [1], S. 17, 18, 23, 37, 92, und [54], S. 710.

[6] Das "neue" Verfahren von *Eckart Bomsdorf* [16] wurde 1822 von *William Lowndes* vorgeschlagen (*Michel L. Balinski / H. Peyton Young* [1], S. 23). Das Verfahren von *Erhard Fengler* [21] wird von *Edward V. Huntington* [28], S. 125, kommentiert.

Möglichkeiten, wie die Abweichung der Mandatsverteilung von der Stimmenverteilung gemessen werden kann, die meisten aus. Die verbleibenden, mit der Erfolgswertgleichheit verträglichen Abweichungsmaße werden von der Sainte-Laguë-Methode optimiert, sowohl was den Vergleich der Unterschiede zweier Wählerstimmen angeht (14) als auch aus der Gesamtschau aller Stimmen (15). Unberührt davon bleiben Überhangmandate, die ein fremdes Element aus Sicht des vollständigen Verhältnisausgleichs darstellen und deren Auftreten auch vom Bundesverfassungsgericht unterschiedlich beurteilt wird (16). Die Formulierung einer mehrheitssichernden Klausel bereitet keine Schwierigkeiten (17).

Zusammengenommen ergibt sich die eindeutige Wertung, daß die Methode von Sainte-Laguë der von d'Hondt und der von Hare–Niemeyer weit überlegen ist (18).

2. Die Divisormethode mit Standardrundung (Sainte-Laguë)

Divisormethoden beruhen auf einem gemeinsamen Divisor d, durch den die auf Partei j entfallenden Stimmen s_j geteilt werden. Der Divisor wird so bestimmt, daß die verfügbare Mandatszahl M ausgeschöpft wird. Die Methoden unterscheiden sich dadurch, wie die p Quotienten s_j/d gerundet werden.[7]

Die Divisormethode mit Standardrundung rundet zur nächstgelegenen ganzen Zahl m_j. Wir benutzen dafür die Notation $m_j = \langle s_j/d \rangle$.[8] Die verfügbaren Mandate werden also wie folgt den Parteien zugeteilt:

- *Divisormethode mit Standardrundung.* Der Stimmengewinn einer jeden Partei wird durch einen Divisor geteilt; der erhaltene Quotient wird zur nächstgelegenen ganzen Zahl gerundet. Dabei ist der allen beteiligten Parteien gemeinsame Divisor so zu bestimmen, daß die verfügbaren Mandate vollständig vergeben werden.

Es empfiehlt sich, im Wahlprotokoll einen endgültigen Divisor mitzuvermerken. Dann kann jeder Interessierte durch leichte Rechnung überprüfen, ob das Ergebnis stimmt: Der Quo-

[7] Wegen dieser sich anschliessenden Rundung gibt es meist einen ganzen Bereich von möglichen Divisoren, die zu demselben Zuteilungsergebnis führen. Soweit möglich zitieren wir aus diesem Bereich einen endgültigen Divisor, der ganzzahlig ist. Er spiegelt somit die Anzahl der Stimmen, die für ein Mandat aufgebracht werden müssen, nur ungefähr wider, ohne den Verlust oder Gewinn aus Ab- oder Aufrundung mit einzubeziehen.

[8] Das heißt, wenn der gebrochene Rest des Quotienten s_j/d kleiner als 0.5 ist, dann wird zur nächsten ganzen Zahl *abgerundet*; wenn er größer als 0.5 ist, dann wird zur nächsten ganzen Zahl *aufgerundet*. Wenn er gleich 0.5 ist, dann gibt es zwei gleichwertige Rundungsmöglichkeiten, nämlich ab- *oder* aufzurunden. Wir werden solche *Bindungen* (engl. *ties*) der Kürze halber nicht weiter diskutieren. Bindungen können bei allen Zuteilungsmethoden auftreten und werden letztlich durch Losentscheid aufgelöst. Siehe BWahlG [71] Art. 6 Abs. 2 Satz 5.—Zur Notation $\langle\cdot\rangle$ siehe Chapter 14 in [59].

tient aus Stimmenzahl und Divisor muß nach Standardrundung die Mandatszahl ergeben.[9] Siehe Tabelle 1.

3. Die Divisormethode mit Abrundung (d'Hondt)

Bei der Divisormethode mit Abrundung wird der Quotient s_j/d aus Stimmengewinn und Divisor zu der ihm innewohnenden ganzen Zahl m_j abgerundet. Wir schreiben dafür $m_j = \lfloor s_j/d \rfloor$. Wiederum ist durch die endgültige Wahl des Divisors sicherzustellen, daß alle Mandate vergeben werden.[10] Siehe Tabelle 2.

Die verfügbaren Mandate werden also wie folgt den Parteien zugeteilt:

- *Divisormethode mit Abrundung.* Der Stimmengewinn einer jeden Partei wird durch einen Divisor geteilt; der erhaltene Quotient wird zu der ihm innewohnenden ganzen Zahl abgerundet. Dabei ist der allen beteiligten Parteien gemeinsame Divisor so zu bestimmen, daß die verfügbaren Mandate vollständig vergeben werden.

---

[9] Der Quotient s_j/d wird zur ganzen Zahl m_j standardgerundet genau dann, wenn s_j/d zwischen $m_j - 1/2$ und $m_j + 1/2$ liegt. Es ergeben sich zwei Ungleichungen, die das mögliche Intervall für einen endgültigen Divisor d festlegen:

$$\max_j \frac{s_j}{m_j + 1/2} \quad \leq \quad d \quad \leq \quad \min_{j:m_j \geq 1} \frac{s_j}{m_j - 1/2}.$$

Dieses Intervall ist meistens groß genug, daß ein Vielfaches von Hundert oder Tausend als Divisor dienen kann. Zum Beispiel wäre bei den bisherigen Bundestagswahlen einzig 1965 (Tabelle 1) ein gebrochener Divisor aufgetreten.—An der linken Intervallgrenze läßt sich ablesen, wer das nächste Mandat zugeteilt bekommt. Für mehr Mandate muß nämlich der Divisor kleiner werden, bis er die untere Grenze überspringt. Diejenige Partei i, deren Quotient $s_i/(m_i + 1/2)$ maximal ist und die somit die Grenze festlegt, bekommt das nächste Mandat. Analog ist der Partei k, für die $s_k/(m_k - 1/2)$ minimal ist, beim letzten Mal ein Mandat zugeteilt worden. Daraus erhält man das übliche Höchstzahlschema (wie zum Beispiel in *Heinrich Rühle* [40], S. 410). Gleichwertig kann man die Kehrwerte $(m_j - 1/2)/s_j$ auswerten, dies führt zum üblichen Rangmaßzahlschema (wie in [53], S. 600, [2], S. 31).—Der Divisor $d = S/M$ verspricht am schnellsten Erfolg. In etwa der Hälfte aller Fälle wird man damit sofort eine endgültige Zuteilung erhalten. Andernfalls wird die Mandatszahl M knapp unter- oder überschritten; diese Diskrepanz wird dann durch Hinzufügen oder Entfernen eines Mandats schrittweise abgebaut. Dazu bedarf es höchstens $\lfloor p/2 \rfloor$, im Durchschnitt aber nur $p/12$ Schritte. (*Maximilian Happacher / Friedrich Pukelsheim* [23, 24], *Gregor Dorfleitner / Thomas Klein* [19]).

[10] Der Quotient s_j/d wird zur ganzen Zahl m_j abgerundet genau dann, wenn s_j/d zwischen m_j und $m_j + 1$ liegt. Daraus ergeben sich zwei Ungleichungen, die das mögliche Intervall für einen endgültigen Divisor d festlegen:

$$\max_j \frac{s_j}{m_j + 1} \quad \leq \quad d \quad \leq \quad \min_j \frac{s_j}{m_j}.$$

Wie in der vorigen Fußnote erhält man die üblichen Schemata von Höchstzahlen und Rangmaßzahlen.—Die beste Divisorwahl ist $d = S/(M + p/2)$; eine etwaige Diskrepanz wird wieder in durchschnittlich $p/12$ und höchstens $\lfloor p/2 \rfloor$ Schritten abgebaut.

4. Die Quotenmethode mit Ausgleich nach größten Resten (Hare–Niemeyer)

Quotenmethoden beruhen auf einer *Quote* q als Grundlage dafür, wieviele Stimmen für die Zuteilung eines einzelnen Mandats verrechnet werden. Sie unterscheiden sich darin, welche Quote vorgegeben wird und wie die mit den Reststimmen einhergehenden Ansprüche auszugleichen sind.

Die Hare-Quote $q = S/M$ ist der Quotient aus zuteilungsrelevanten Stimmen und verfügbaren Mandaten.[11] In einem ersten Schritt werden jeder Partei soviele Mandate zugewiesen, wie oft ihre Stimmenzahl s_j die Quote q enthält. Diese *Erstzuteilung* ist somit gleich $\lfloor s_j/q \rfloor$, dem abgerundeten Quotienten s_j/q. Die Erstzuteilungen schöpfen die Mandatszahl M im allgemeinen nicht aus.

In einem zweiten Schritt fallen dann die übrigen Mandate der Reihe nach an diejenigen Parteien, die stimmenmäßig die größten Reste vorweisen und somit der Quote so weit wie noch möglich Genüge tun, wenn sie sie schon nicht mehr erreichen können.[12] Siehe Tabelle 3.

Die verfügbaren Mandate werden also wie folgt den Parteien zugeteilt:

- *Quotenmethode mit Ausgleich nach größten Resten.* Der Stimmengewinn einer jeden Partei wird durch die Gesamtstimmenzahl geteilt und mit der Mandatszahl vervielfacht; das erhaltene Ergebnis wird zerlegt in die ihm innewohnende ganze Zahl und den gebrochenen Rest. Alle Parteien erhalten zuerst soviele Mandate, wie ihre so bestimmten ganzen Zahlen jeweils ausmachen; die danach noch übrigen Mandate werden in der Reihenfolge der größten Reste vergeben.

Der Unterschied zwischen Divisor- und Quotenmethoden kann—etwas pointiert—so gesehen werden: Divisormethoden arbeiten mit einem variablen Divisor d und runden die Quotienten s_j/d unabhängig voneinander und einzeln; die Ausschöpfung der vorgegebenen Mandatszahl wird durch die Variation des Divisors sichergestellt. Quotenmethoden arbeiten mit einem festen Divisor, der Quote q, und runden die Quotienten s_j/q abhängig voneinander je nach Reihung der Reste; die Ausschöpfung der vorgegebenen Mandatszahl wird durch die Variation des Rundungsschritts sichergestellt.

---

[11] Allerdings argumentierte *Thomas Hare* [26], S. 351, auf das *Single Transferable Vote* System hin.

[12] Andere Quotenmethoden teilen die übrigen Mandate zu, indem sie nach den *größten relativen* Resten $(s_j - g_j q)/g_j$ oder nach den größten Stimmenanzahlen s_j oder nach einem anderen Kriterium reihen. Siehe *Dieter Nohlen* [5], S. 68.

Tabelle 1: Divisormethode mit Standardrundung (Sainte-Laguë)
Wahl zum 5. Deutschen Bundestag am 19. September 1965 (Quelle: [53])

	SPD	CDU	CSU	FDP	Divisor
Zweitstimmen	12 813 186	12 387 562	3 136 506	3 096 739	
Fiktive Mandatszuteilung der Divisormethode mit Standardrundung für ...					
497 Mandate	$\langle 202.2\rangle = 202$	$\langle 195.5003\rangle = 196$	$\langle 49.50028\rangle = 50$	$\langle 48.9\rangle = 49$	63 363.4
496 Mandate	$\langle 202.2\rangle = 202$	$\langle 195.4997\rangle = 195$	$\langle 49.50012\rangle = 50$	$\langle 48.9\rangle = 49$	63 363.6
495 Mandate	$\langle 202.2\rangle = 202$	$\langle 195.4990\rangle = 195$	$\langle 49.49997\rangle = 49$	$\langle 48.9\rangle = 49$	63 363.8

Bei der Divisormethode mit Standardrundung werden die Quotienten von Stimmen und Divisor zur nächsten ganzen Zahl gerundet: $\langle s_j/d\rangle = m_j$. Um genau 496 Mandate zu vergeben, muß im Beispiel ein Divisor zwischen 63 363.5 und 63 363.7 gewählt werden. Nur diese Bundestagswahl 1965 erfordert einen gebrochenen Divisor. Ansonsten gibt es meistens einen passenden Divisor, der ganzzahlig ist.

Tabelle 2: Divisormethode mit Abrundung (d'Hondt)
Wahl zum 5. Deutschen Bundestag am 19. September 1965 (Quelle: [53])

	SPD	CDU	CSU	FDP	Divisor
Zweitstimmen	12 813 186	12 387 562	3 136 506	3 096 739	
Mandatszuteilung der Divisormethode mit Abrundung für ...					
497 Mandate	$\lfloor 203.4\rfloor = 203$	$\lfloor 196.628\rfloor = 196$	$\lfloor 49.8\rfloor = 49$	$\lfloor 49.1546\rfloor = 49$	63 000
496 Mandate	$\lfloor 202.9\rfloor = 202$	$\lfloor 196.161\rfloor = 196$	$\lfloor 49.7\rfloor = 49$	$\lfloor 49.0378\rfloor = 49$	63 150
495 Mandate	$\lfloor 202.7\rfloor = 202$	$\lfloor 196.006\rfloor = 196$	$\lfloor 49.6\rfloor = 49$	$\lfloor 48.9990\rfloor = 48$	63 200

Bei der Divisormethode mit Abrundung werden die Quotienten von Stimmen und Divisor zum ganzzahligen Anteil abgerundet: $\lfloor s_j/d\rfloor = m_j$. Um genau 496 Mandate zu vergeben, muß im Beispiel ein Divisor zwischen 63 120 und 63 198 gewählt werden.

Tabelle 3: Quotenmethode mit Ausgleich nach größten Resten (Hare–Niemeyer)
Wahl zum 5. Deutschen Bundestag am 19. September 1965 (Quelle: [53])

	SPD	CDU	CSU	FDP
Zweitstimmen	12 813 186	12 387 562	3 136 506	3 096 739
Fiktive Mandatszuteilung der Quotenmethode mit Ausgleich nach größten Resten für ...				
497 Mandate	$\lfloor 202.588\rfloor = 202$	$\lceil 195.859\rceil = 196$	$\lceil 49.591\rceil = 50$	$\lceil 48.962\rceil = 49$
496 Mandate	$\lfloor 202.180\rfloor = 202$	$\lfloor 195.465\rfloor = 195$	$\lceil 49.491\rceil = 50$	$\lceil 48.864\rceil = 49$
495 Mandate	$\lceil 201.773\rceil = 202$	$\lfloor 195.070\rfloor = 195$	$\lfloor 49.391\rfloor = 49$	$\lceil 48.765\rceil = 49$

Bei der Quotenmethode mit Ausgleich nach größten Resten werden zunächst die Erstzuteilungen $\lfloor s_j M/S\rfloor$ zugewiesen und dann die übrigen Mandate nach den größten Resten zugeteilt. Die Endzuteilungen sind also entweder $\lfloor s_j M/S\rfloor$ oder $\lceil s_j M/S\rceil$.

5. Zur Transparenz von Zuteilungsmethoden

Wichtig für die Transparenz einer Methode ist, daß ihre Rechenregeln leicht zu vermitteln und das Zuteilungsergebnis leicht zu überprüfen ist.[13] In dieser Hinsicht sind Divisormethoden nicht zu übertreffen: *Teile und runde*! Und wenn nur ein endgültiger Divisor zitiert wird, kann für jede Partei *einzeln* das Ergebnis mühelos geprüft werden. Im Gegensatz dazu müssen bei den Quotenmethoden (Teile, ordne und runde!) die Erstzuteilungen *aller* Parteien ausgewertet werden, bevor der Restausgleich geprüft werden kann.

Unwichtig für die Transparenz einer Methode ist die Art, wie das Ergebnis berechnet wird. Die Wiederentdeckung schon bekannter Zuteilungsmethoden krankt regelmäßig daran, daß die Autoren von "ihrem" Berechnungsverfahren geblendet sind. Bekanntlich gibt es für jede Rechenaufgabe Hunderte von Wegen, sie zu lösen. Der eine Weg mag geschickter sein als der andere.[14] Der Rechenweg sagt aber nichts darüber aus, ob das Ergebnis für sich genommen mehr oder weniger Sinn macht als ein anderes.[15] Es ist das Verdienst von *Michel L. Balinski* und *H. Peyton Young*, in ihren Arbeiten die vom Einzelergebnis losgelöste, fallunabhängige *Struktur* von Zuteilungsmethoden entwickelt zu haben.

6. Abweichungen der Mandatsverteilung von der Stimmenverteilung

Die Qualität einer Zuteilungsmethode hängt davon ab, inwieweit die mit dieser Methode berechneten Zuteilungsergebnisse $m_1, \ldots, m_p$ mit den Ausgangsdaten harmonieren, also mit der Parteienzahl p, den auf die Parteien entfallenden Stimmen $s_1, \ldots, s_p$ und der Mandatszahl M.

---

[13] *David Hill* [27], S. 245, spricht von "acceptability and simplicity".

[14] Divisormethoden werden häufig (aber nicht immer: siehe *Adolf Tecklenburg* [46], S. 152, zur d'Hondt-Methode, oder *Edward V. Huntington* [28], S. 96, zur Sainte-Laguë-Methode) über Höchstzahlen oder über Rangmaßzahlen charakterisiert. Der Grund liegt wohl in dem Karteikartenritual (wie etwa die "working rule" in *Edward V. Huntington* [28], S. 88), das sich im Zeitalter von Computern und Taschenrechnern überlebt hat. Aktuell bleibt aber, die von Maschinen berechneten und von Zeitungen und Fernsehen verbreiteten Zuteilungen nachvollziehen zu können.

[15] Gänzlich unerheblich ist es, wenn ein *einzelner Zwischenschritt* besonders sinnvoll erscheint; siehe These 10 in *Peter Kunth* [30], S. 323.

Es gehört zum Wesen der Verhältniswahl, daß die Mandatsverteilung eine den Verhältnissen gemäße Anpassung an die im Wahlakt niedergelegte Stimmenverteilung darstellt:[16]

$$\textit{Mandatsverteilung:} \quad \frac{m_1}{M}, \ldots, \frac{m_p}{M}$$

$$\textit{Stimmenverteilung:} \quad \frac{s_1}{S}, \ldots, \frac{s_p}{S}$$

Teile sind nicht denkbar ohne den Bezug auf ein Ganzes. Formal spiegelt sich diese Normierung darin wider, daß sich Mandatsanteile wie Stimmenanteile jeweils zu Eins aufaddieren. Inhaltlich beziehen wir "das Ganze" auf die Gesamtzahl der Mandate M und die Gesamtzahl der zuteilungsrelevanten Stimmen S. Die Stimmen von Splitterparteiwählern, Falschwählern und Nichtwählern bleiben unberücksichtigt. Diese Rechtslage ist verfassungsgerichtlich wiederholt bestätigt worden.[17]

Die Mandatsverteilung hat natürlich eine gröbere Struktur als die feinere Stimmenverteilung. Zuteilungsmethoden sind danach zu bewerten, ob sich die mit ihnen berechnete Mandatsverteilung möglichst gut an die Stimmenverteilung anpaßt und möglichst wenig von ihr abweicht. Der springende Punkt ist, wie diese Qualitätsanforderungen präzisiert werden. Im Rahmen dieses Aufsatzes konzentrieren wir uns auf solche Anforderungen, die einer mathematischen Behandlung zugänglich sind.

7. Unverzerrtheit der Sainte-Laguë-Mandatsverteilung

Eine Zuteilungsmethode heißt *unverzerrt*, wenn keine Abweichungen zwischen Mandatsverteilung und Stimmenverteilung zu erwarten sind; wichtig ist, daß von *Erwartung* die Rede ist und somit das durchschnittliche Verhalten einer Methode erfaßt wird. Das Gegenteil ist eine *verzerrte* Methode, für die bei wiederholtem Einsatz die Mandatsverteilung von der Stimmenverteilung nicht zufällig, sondern regelmäßig abweicht.

[16] Siehe BVerfGE [57] Bd. 95, S. 353–354: "... das Sitzzuteilungsverfahren nach der Stimmabgabe, in welchem die Zahlen der für die Listen abgegebenen Stimmen zueinander ins Verhältnis gesetzt und danach die in der Listenwahl zu vergebenden Sitze zugeteilt werden." Und weiter S. 370–371: "[An die Stimmenauszählung] schließt sich noch ein Rechenverfahren an, welches das Verhältnis der Stimmen für die Parteilisten zu den Gesamtstimmen feststellt und dementsprechend die Sitzzuteilung regelt."

[17] Siehe etwa BayVerfGH [63], S. 21: "Maßgebend für die Sitzverteilung im Landtag sind nur die abgegebenen gültigen Stimmen für solche Wahlvorschläge, welche die Fünf-Prozent-Sperrklausel überwunden haben."—Für unsere Zwecke ist es verfehlt, die auf die Parteien entfallenden Stimmen auf die Zahl der gültigen Stimmen, der abgegebenen Stimmen oder der Wahlberechtigten zu beziehen.—In Neuseeland und anderswo ([62], S. 71) werden Modifizierungen der Divisormethode mit Standardrundung (Sainte-Laguë) diskutiert, die den Erwerb der ersten Mandate zusätzlich erschweren. Wir übergehen solche Modifizierungen, da nach deutscher Rechtsprechung ganz besondere, zwingende Gründe vorliegen müssen, um eine Erhöhung der Sperrklausel zu rechtfertigen (BVerfGE [57], Bd. 1, S. 256).

Die Divisormethode mit Standardrundung (Sainte-Laguë) ist unverzerrt. Dies ist eines der wesentlichen Ergebnisse von *Michel L. Balinski / H. Peyton Young*, empirisch überprüft an den umfangreichen Datensätzen zur Sitzzuteilung im US-Repräsentantenhaus und theoretisch untermauert durch Modellrechnungen.[18] In unseren Beispielen in den Tabellen 4 und 5 betragen die Abweichungen der Mandatsverteilung nach Sainte-Laguë von der Stimmenverteilung −0.1, −0.2, 0.0, +0.3 und +0.8, −0.2, −0.1, −0.1, −0.4 Prozentpunkte. Im Einzelfall sind die Abweichungen natürlich auch hier nicht Null. Aber die Schwankungen erscheinen zufällig und vollauf geeignet, sich bei der für die Erwartung notwendige Mittelbildung auszugleichen. Zudem fallen sie betragsmäßig viel geringer aus als die der d'Hondt-Methode.

8. Verzerrtheit der d'Hondt-Mandatsverteilung

Die Divisormethode mit Abrundung (d'Hondt) ist verzerrt.[19] Die d'Hondt-Methode begünstigt große Parteien auf Kosten kleiner Parteien. Große Parteien verschmerzen Verluste irgendwelcher Reste eben leichter als kleine.[20]

In den USA wurde die d'Hondt-Methode in der Mitte des vorigen Jahrhunderts abgeschafft. Seit Staatsgründung diente sie dazu, die Sitze im Repräsentantenhaus an die Bundesstaaten gemäß den Einwohnerzahlen zuzuteilen. Die demographischen Verschiebungen im expandierenden Land ließen die der Methode eigentümlichen Verzerrungen überdeutlich hervortreten. Vehement bekämpften die Gründerstaaten den verzerrten Sitzverlust—und damit Machtverlust—zu Gunsten der Bundesstaaten, die neu in die Union aufgenommen wurden. Schließlich war die Methode nicht mehr mehrheitsfähig.[21] Nach 50jährigen Intermezzo der Hare–Niemeyer-Methode wird heutzutage die Divisormethode mit geometrische-Mittel-Rundung verwendet.

Für die Ausschüsse des Deutschen Bundestages wurde die d'Hondt-Methode 1970 abgeschafft. Damals war die sozialliberale Regierungsmehrheit selbst Opfer, weil nicht sie, sondern die Opposition die größte Fraktion stellte und von der Verzerrung am meisten profitierte. Angesichts des Wechsels dreier Abgeordneter vom Regierungs- ins Oppositionslager drohte, daß in einigen Ausschüssen die regierende Koalition die Mehrheit an die Opposition

[18] [12], S. 3, [1], S. 118–128. Siehe auch *André Sainte-Laguë* [41], S. 848, *Georg Pólya* [37], S. 321, *Ladislaus von Bortkiewicz* [17], S. 24. Oder den verbalen Exkurs *Arend Lijphart* [31].

[19] Engl. *biased*, dt. auch *verfälscht*. Wir vermeiden den Begriff "Verfälschung", da er über die Kette *falsch, richtig, gerecht, ungerecht* zu unpassender Moralität verführt.

[20] So wie 1994 der Vorstandsvorsitzende einer deutschen Bank mit Bilanzsumme von über 800 Milliarden DM offene Handwerkerforderungen von unter 50 Millionen DM medienwirksam als "Peanuts" abtat.

[21] *Michel L. Balinski / H. Peyton Young* [1], Chapter 4.

verloren hätte. Das war das Ende der d'Hondt-Methode. Nach 10jährigen Intermezzo der Hare–Niemeyer-Methode war der Bundestag gut beraten, für die Ausschußbesetzungen zur Divisormethode mit Standardrundung (Sainte-Laguë) zu verwenden.[22]

Für Bundestagswahlen selber wurde die d'Hondt-Methode 1985 abgeschafft. Die kleinere Koalitionpartei war es leid, regelmäßig den größeren Partner zu alimentieren. Sie bestand in den Koalitionsverhandlungen auf dem Wechsel zur Quotenmethode mit Ausgleich nach größten Resten (Hare–Niemeyer).

Im Bayerischen Landtag wurde die d'Hondt-Methode im Gefolge der Landtagswahl 1990 abgeschafft und 1994 durch die Hare–Niemeyer-Methode ersetzt. Die Verzerrungen der d'Hondt-Methode benachteiligten nur die Oppositionsparteien, weshalb die Abschaffung vor dem Verfassungsgerichtshof erstritten werden mußte. Die Wahlergebnisse, die den aktuellen Anlaß für das Urteil boten, sind in Tabelle 4 aufgelistet.[23] Weniger aktuell, aber genauso klar sticht dieser Defekt schon bei der zweiten Bundestagswahl 1953 ins Auge (Tabelle 5). Wie sich Bayern in die sieben Regierungsbezirke als Wahlkreise aufgliedert, so galten bei der damaligen Bundestagswahl die neun Länder als Wahlkreise. Die Mandatskontingente wurden vorab nach Einwohnerzahlen zugewiesen.

In jedem dieser Fälle ist die Mandatsverteilung im gesamten Wahlgebiet ein gewichtetes Mittel der Mandatsverteilungen in den einzelnen Wahlkreisen.[24] Durch diese Mittelbildung wird der Forderung Genüge getan, daß die Verzerrung eine *erwartete* Eigenschaft der Methode umschreibt. Zeitliche Ausmittelung entlarvt den Defekt genauso. Für die Bundestagswahlen von 1957 bis 1983, in denen die Mandate mit der d'Hondt-Methode zugeteilt wurden, zeigt der Unterschied zur Sainte-Laguë-Zuteilung per Saldo dieselbe Verzerrung zu Gunsten der Großen auf Kosten der Kleinen: CDU +6, SPD +3, CSU −3, FDP −4 Mandate.[25]

---

[22] [53], S. 599–601.

[23] Schon 1919 betonte *Georg Pólya* [36], S. 4, daß "das d'Hondt'sche Verfahren mit Wahlkreiseinteilung angewendet *die stärkste Partei auf Kosten der beiden anderen systematisch bevorzugt*". Seine Beispielrechnungen passen hervorragend auf die bayerischen Verhältnisse.—Siehe auch *Heinrich Rühle* [40], *Rainer-Olaf Schultze / Jürgen Ender* [43], *Gerhard Zech* [48].

[24] Im Wahlkreis i sei M_i die Zahl der Mandate und m_{ij} die Zuteilung an Partei j. Die Mandatsverteilung im Wahlkreis i ist $\frac{m_{i1}}{M_i}, \ldots, \frac{m_{ip}}{M_i}$. In der Summe über w Wahlkreise erhält Partei j somit $m_j = m_{1j} + \cdots + m_{wj}$ Mandate. Die Mandatsverteilung im Wahlgebiet hat dann die Komponenten

$$\frac{m_j}{M} = \frac{M_1}{M} \cdot \frac{m_{1j}}{M_1} + \cdots + \frac{M_w}{M} \cdot \frac{m_{wj}}{M_w} = \sum_{i=1}^{w} \frac{M_i}{M} \frac{m_{ij}}{M_i},$$

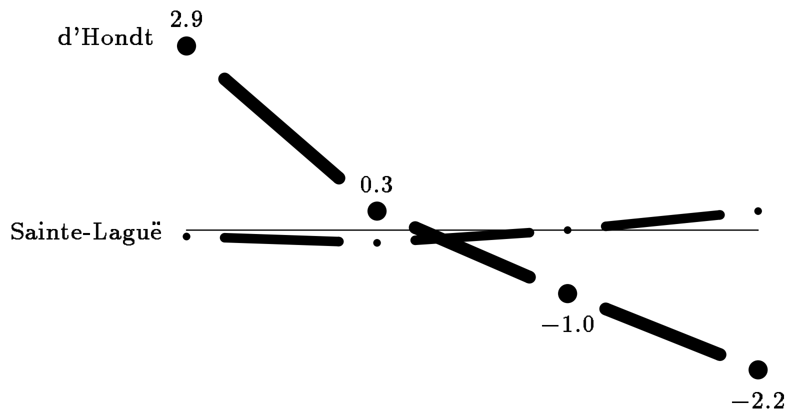
ist also das mit M_i/M gewichtete Mittel der Mandatsverteilungen in den Wahlkreisen $i = 1, \ldots, w$.

[25] Und DP und Die Grünen jeweils −1. Siehe *Heinrich Rühle* [40], S. 412.

Tabelle 4: Verzerrtheit der Divisormethode mit Abrundung (d'Hondt)
Wahl zum 12. Bayerischen Landtag am 14. Oktober 1990 (Quelle: [65])

	CSU : %	SPD : %	Grüne : %	FDP : %	Divisor
1. Oberbayern (65 Mandate)	1 933 426 : 57.9	877 546 : 26.3	296 675 : 8.9	231 429 : 6.9	
Sainte-Laguë=H.–N.	38 : 58.5	17 : 26.1	6 : 9.2	4 : 6.2	51 500
d'Hondt	39 : 60.0	17 : 26.1	5 : 7.7	4 : 6.2	49 500
2. Niederbayern (20)	591 415 : 65.6	228 306 : 25.3	45 205 : 5.0	37 308 : 4.1	
Sainte-Laguë=H.–N.	13 : 65.0	5 : 25.0	1 : 5.0	1 : 5.0	45 000
d'Hondt	14 : 70.0	5 : 25.0	1 : 5.0	0 : 0.0	41 000
3. Oberpfalz (19)	597 525 : 62.4	288 335 : 30.1	40 019 : 4.2	31 125 : 3.3	
Sainte-Laguë	11 : 57.8	6 : 31.6	1 : 5.3	1 : 5.3	52 000
d'Hondt	13 : 68.4	6 : 31.6	0 : 0.0	0 : 0.0	44 000
Hare–Niemeyer	12 : 63.1	6 : 31.6	1 : 5.3	0 : 0.0	
4. Oberfranken (20)	622 408 : 58.8	344 810 : 32.6	51 452 : 4.9	38 627 : 3.7	
Sainte-Laguë=H.–N.	12 : 60.0	6 : 30.0	1 : 5.0	1 : 5.0	53 500
d'Hondt	12 : 60.0	7 : 35.0	1 : 5.0	0 : 0.0	48 500
5. Mittelfranken (28)	754 413 : 51.9	495 948 : 34.1	106 691 : 7.3	97 782 : 6.7	
Sainte-Laguë=H.–N.	14 : 50.1	10 : 35.7	2 : 7.1	2 : 7.1	52 100
d'Hondt	15 : 53.6	10 : 35.7	2 : 7.1	1 : 3.6	49 100
6. Unterfranken (23)	743 604 : 62.2	318 452 : 26.7	73 719 : 6.2	58 344 : 4.9	
Sainte-Laguë=d'H.	15 : 65.3	6 : 26.1	1 : 4.3	1 : 4.3	49 300
Hare–Niemeyer	14 : 60.9	6 : 26.1	2 : 8.7	1 : 4.3	
7. Schwaben (29)	850 723 : 62.7	328 611 : 24.2	98 340 : 7.3	78 723 : 5.8	
Sainte-Laguë=H.–N.	18 : 62.1	7 : 24.1	2 : 6.9	2 : 6.9	47 000
d'Hondt	19 : 65.5	7 : 24.1	2 : 6.9	1 : 3.5	44 000
Landtagsmandate (204) *in der Summe über die sieben Regierungsbezirke*					
Sainte-Laguë	121 : 59.3	57 : 27.9	14 : 6.9	12 : 5.9	
d'Hondt	127 : 62.3	58 : 28.4	12 : 5.9	7 : 3.4	
Hare–Niemeyer	121 : 59.3	57 : 27.9	15 : 7.4	11 : 5.4	
Gesamtstimmen in Bayern	6 093 514 : 59.4	2 882 008 : 28.1	712 101 : 6.9	573 338 : 5.6	

Differenz zwischen siebenfach gemittelter Mandatsverteilung und bayernweiter Stimmenverteilung

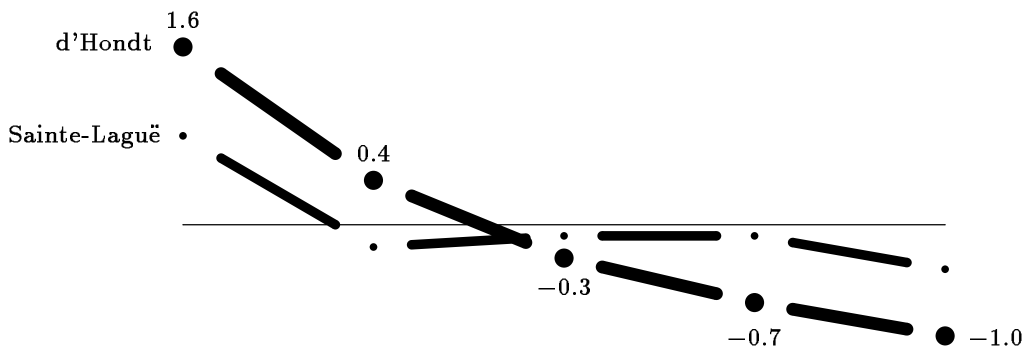


Die Divisormethode mit Abrundung (d'Hondt) ist verzerrt zu Gunsten großer und auf Kosten kleiner Parteien. Im Vergleich dazu weist die Divisormethode mit Standardrundung (Sainte-Laguë) geringere Abweichungen auf, die zudem keine systematische Regelmäßigkeit erkennen lassen.

Tabelle 5: Verzerrtheit der Divisormethode mit Abrundung (d'Hondt)
Wahl zum 2. Deutschen Bundestag am 6. September 1953 (Quelle: [56])

	CDU/CSU:	%	SPD:	%	FDP:	%	GB-BHE:	%	DP+S,Z:	%	Divisor
1. SH (24)	636 570 :	48.5	357 798 :	27.3	61 486 :	4.7	157 100 :	12.0	54 170+44 585		
S.-L.=H.-N.	12 :	50.0	6 :	25.0	1 :	4.2	3 :	12.5	1+1=2	SSW	55 200
d'Hondt	12 :	50.0	7 :	29.1	1 :	4.2	3 :	12.5	1+0=1		50 000
2. HH (17)	389 335 :	39.3	403 410 :	40.8	108 722 :	11.0	26 133 :	2.6	62 123 :	6.3	
Sainte-Laguë	7 :	41.1	7 :	41.2	2 :	11.8	0 :	0.0	1 :	5.9	54 000
3. NI (66)	1 330 982 :	37.1	1 136 522 :	31.7	260 894 :	7.3	406 971 :	11.4	449 203 :	12.5	
Sainte-Laguë	25 :	37.9	21 :	31.8	5 :	7.6	7 :	10.6	8 :	12.1	54 300
4. HB (6)	88 456 :	27.1	138 846 :	42.6	26 777 :	8.2	11 604 :	3.6	60 464 :	18.5	
Sainte-Laguë	2 :	33.3	3 :	50.0	0 :	0.0	0 :	0.0	1 :	16.7	54 000
5. NW (138)	3 915 320 :	51.1	2 553 014 :	33.3	682 902 :	8.9	213 951 :	2.8	80 034+217 078		
S.-L.=H.-N.	71 :	51.5	46 :	33.3	12 :	8.7	4 :	2.9	1+4=5	Z	55 000
d'Hondt	72 :	52.2	47 :	34.0	12 :	8.7	3 :	2.2	1+3=4		54 300
6. HE (44)	849 125 :	34.7	862 701 :	35.2	502 548 :	20.5	163 499 :	6.7	70 704 :	2.9	
Sainte-Laguë	15 :	34.1	16 :	36.4	9 :	20.4	3 :	6.8	1 :	2.3	55 000
7. RP (31)	924 932 :	55.4	482 686 :	28.9	214 805 :	12.9	26 210 :	1.6	19 731 :	1.2	
S.-L.=d'H.	18 :	58.1	9 :	29.0	4 :	12.9	0 :	0.0	0 :	0.0	52 500
Hare–Niemeyer	17 :	54.9	9 :	29.0	4 :	12.9	1 :	3.2	0 :	0.0	
8. BW (67)	1 881 874 :	55.2	825 704 :	24.2	455 535 :	13.3	193 532 :	5.7	56 268 :	1.6	
S.-L.=H.-N.	37 :	55.2	16 :	23.9	9 :	13.4	4 :	6.0	1 :	1.5	51 000
d'Hondt	38 :	56.7	16 :	23.9	9 :	13.4	3 :	4.5	1 :	1.5	49 000
9. BY (91)	2 427 387 :	55.3	1 184 262 :	27.0	315 494 :	7.2	417 953 :	9.5	43 431 :	1.0	
Sainte-Laguë	50 :	54.9	24 :	26.4	7 :	7.7	9 :	9.9	1 :	1.1	48 500
d'Hondt	52 :	57.1	25 :	27.5	6 :	6.6	8 :	8.8	0 :	0.0	46 500
Hare–Niemeyer	50 :	54.9	25 :	27.5	6 :	6.6	9 :	9.9	1 :	1.1	
Bundestagsmandate (484, ohne Überhangmandate) *in der Summe über die neun Bundesländer*											
Sainte-Laguë	237 :	49.0	148 :	30.6	49 :	10.1	30 :	6.2	20 :	4.1	
d'Hondt	241 :	49.8	151 :	31.2	48 :	9.9	27 :	5.6	17 :	3.5	
Hare–Niemeyer	236 :	48.8	149 :	30.8	48 :	9.9	31 :	6.4	20 :	4.1	
Stimmen	12 443 981 :	48.2	7 944 943 :	30.8	2 629 163 :	10.2	1 616 953 :	6.3	1 157 791 :	4.5	

Differenz zwischen neunfach gemittelter Mandatsverteilung und bundesweiter Stimmenverteilung



Bei der zweiten Bundestagswahl galt jedes Land als Wahlkreis (SH = Schleswig-Holstein, HH = Hamburg, NI = Niedersachsen, HB = Bremen, NW = Nordrhein-Westfalen, HE = Hessen, RP = Rheinland-Pfalz, BW = Baden-Württemberg, BY = Bayern). Die neunfach getrennte Ermittlung der Mandatszuteilung zeigt dieselbe Verzerrung wie Tabelle 4.

9. Verfassungswidrigkeit der d'Hondt-Methode

Eigentlich ist die Sache klar. Die Verzerrung der d'Hondt-Methode ist eine gesicherte wissenschaftliche Erkenntnis. Um so mehr irritieren die merkwürdigen Widersprüchlichkeiten, mit denen der Bayerische Verfassungsgerichtshof sein Urteil begründet.[26] Es ist dem Gerichtshof ein Anliegen, das jahrzehntelange, höchstrichterliche Festhalten an der d'Hondt-Methode zu exkulpieren:

> "Gegen das d'Hondt'sche Höchstzahlverfahren ... bestehen als solches grundsätzlich nach wie vor keine verfassungsrechtlichen Bedenken."

Bewegt von den Zahlen der Landtagswahl 1990 verrennt er sich in die für ihn neue Idee, daß der vom Idealanspruch Ms_j/S gesetzte Rahmen nicht verlassen werden darf:[27]

> "Eine Auf- oder Abrundung [des Idealanspruchs] zur nächsten ganzen Zahl von Mandaten ist deshalb bei jedem Verteilungsverfahren unerläßlich."

Denn ohne die besonderen bayerischen Verhältnisse der siebenfach getrennten Mandatszuteilung gäbe es keinen Anlaß zur Kritik:

> "Die verfassungsrechtliche Gleichwertigkeit des d'Hondt'schen Höchstzahlverfahrens etwa mit dem Proporzverfahren nach Hare/Niemeyer ... ist uneingeschränkt allerdings nur dann gegeben, wenn es um die Verteilung eines einzigen Sitzkontingents innerhalb eines einzigen Wahlgebiets geht."

Dieser Dreisatz mutet harmlos an, hat es aber in sich. Die Vorstellungen, die das Gericht hier zum Ausdruck bringt, erscheinen mir unvereinbar mit den Schlußfolgerungen, die aus Sicht der Mathematik zu ziehen sind.

Im ersten Wahlkreis von Tabelle 4 erwirbt die größte Partei den Idealanspruch von 37.6 Mandatsbruchteilen. Aus Sicht des Gerichtshofs ist es "unerläßlich", zu 37 oder 38 Mandaten zu runden. Die d'Hondt-Zuteilung von 39 Mandaten sprengt diesen engen Rahmen. Im fünften Wahlkreis von Tabelle 5 erreicht die größte Partei den Idealanspruch von 70.5 Mandatsbruchteilen, aber die d'Hondt-Zuteilung springt auf 72 Mandate. In beiden Fällen handelt es sich um ein einziges Sitzkontingent innerhalb eines einzigen Wahlkreises, in dem übrigens die Zahl der gültigen Stimmen und der zu vergebenen Mandate jeweils am größten ist. Hält der Gerichtshof die für ihn neue Idee wirklich für "unerläßlich", wären diese beiden d'Hondt-Zuteilungen verfassungswidrig. Die "verfassungsrechtliche Gleichwertigkeit"

[26] [63], S. 54–67; die nachfolgenden drei Zitate stehen auf S. 64.
[27] Diese Forderung ist ebenso naheliegend wie uralt, siehe *Michel L. Balinski / H. Peyton Young* [1], S. 14. Sie ist die Quelle der Paradoxien, auf die wir gleich zu sprechen kommen.

zur Hare–Niemeyer-Methode ist also auch dann nicht gegeben, wenn es um ein einziges Sitzkontingent innerhalb eines einzigen Wahlkreises geht.

Der Gerichtshof schränkt ein, er halte die d'Hondt-Methode nur "grundsätzlich" für unbedenklich. Was könnte hier gemeint sein? Daß jeder Grundsatz durch extreme Einzelfälle gefährdet werden kann, ist eine Binsenweisheit, unsere Beispiele sind da keine Ausnahme. Aber es steckt mehr dahinter. Da der Begriff der Verzerrung die erwartete, durchschnittliche Abweichung von der Stimmenverteilung erfaßt, wird grob eine Hälfte der Einzelfälle noch mehr und die andere weniger abweichen als der Durchschnitt. *Wenn der Durchschnitt verfassungswidrig ist, dann notwendig auch ein gut Teil der Einzelfälle.* Ein Blick auf die Daten konkretisiert diese Überlegungen. Für die größte Partei in Tabelle 4 weicht die Mandatsverteilung nach d'Hondt von der Stimmenverteilung im gesamten Wahlgebiet um 2.9 Prozentpunkte ab, während in den sieben Wahlkreisen die einzelnen Abweichungen 2.1, 4.4, 6.0, 1.2, 1.7, 3.1 und 2.8 Prozentpunkte betragen. Insgesamt verfassungswidrig, im einzelnen aber *alles* verfassungskonform? Das ist mathematisch nicht möglich.

Der Bayerische Verfassungsgerichtshof urteilt—in meiner Sprache der Mathematik—, daß die d'Hondt-Methode verzerrt ist und bessere Zuteilungsmethoden zur Verfügung stehen.[28] Die Richtung stimmt. Aber mit seiner inkonsistenten Begründung hat er den Gesetzgeber dazu verführt, die Zuteilungsmethode von Hare–Niemeyer einzuführen. Das Ziel stimmt nicht. Diese Methode steckt voller Paradoxien, die sie disqualifizieren.

10. Parteienzuwachs-Paradox

Quotientenmethoden können zu widersinnigen Mandatsverschiebungen führen, wenn sich das Umfeld nur geringfügig ändert. Die US-Parlamentsgeschichte hat solche Situationen zum Teil tatsächlich erlebt. In unserer Einkleidung passen wir die Paradoxien an deutsche Verhältnisse an. Wir beginnen damit, daß über p Parteien hinaus noch eine weitere Partei am Zuteilungsverfahren teilnimmt. Obwohl die Stimmen für die ersten p Parteien unberührt bleiben, können ihre Mandatsverhältnisse von der Hare-Niemeyer-Methode in kurioser Weise verkehrt werden.

[28] BayVerfGH [63], S. 54.—Die Rechtsprechung des Bundesverfassungsgerichts entwickelt sich von "Es trifft zwar zu, daß das d'Hondt'sche Höchstzahlverfahren nicht immer zu völlig proporzgerechten Ergebnissen führt. Andererseits besteht aber Einigkeit darüber, daß es—bei beweglichen Wahlquotienten—ein exakteres praktisch durchführbares System, das zu gerechteren Ergebnissen führen würde, nicht gibt." in 1964 ([57], Bd. 16, S. 144) zu "Deshalb erscheint weder das Verteilungsverfahren nach Niemeyer noch das Höchstzahlverfahren nach d'Hondt als prinzipiell 'richtiger' und damit als zur Wahrung des Grundsatzes der Wahlrechtsgleichheit allein systemgerecht." in 1988 ([57], Bd. 79, S. 171).

Ähnlich wie im 12. Bundestag stellen drei Fraktionen A, B, C zusammen 637 Abgeordnete. Sie teilen die 37 Sitze des Haushaltsausschusses im Verhältnis 18 / 14 / 5 auf. Wegen außergewöhnlicher Umstände besteht allseitiges Einverständnis, die 17 Abgeordneten der vierten Partei D mit einzubeziehen, auch wenn ihnen der Fraktionsstatus fehlt. Angesichts der Quote $637/37 = 17.2$ zwischen Plenum und Ausschuß wird für die hinzutretende Partei D einfach ein Überhangsitz neu geschaffen.[29] Da fordert die A-Fraktion, sie kriege nun einen der fünf Sitze der C-Fraktion. Empörung in der C-Fraktion ("Zwischen C und A hat sich doch nichts geändert. Das ist ja paradox!"), Hektik im Präsidium. Bis die Parlamentspräsidentin die Wogen glättet: Es bleibe bei der Ausschußbesetzung 18 / 14 / 5 / 1. Die A-Fraktion habe wohl nach der alten Quotenmethode von Hare–Niemeyer gerechnet. Aber seit 1980 verfahre der Bundestag für Ausschußbesetzungen nach der Divisormethode von Sainte-Laguë, die frei sei von diesem *Parteienzuwachs-Paradox*.[30] Siehe Tabelle 6.

Tabelle 7 demonstriert auf besonders drastische Weise die Verkehrungen, die das Parteienzuwachs-Paradox nach sich ziehen kann. Partei A verliert ihre relative Mehrheit nur dadurch, daß eine vierte Partei hinzutritt, die aber keinen Sitz zugeteilt bekommt.[31]

11. *Stimmenzuwachs-Paradox*

Beim Übergang vom vorläufigen zum endgültigen Wahlergebnis einer Bundestagswahl tritt eine fragwürdige Mandatsverschiebung ein, das *Stimmenzuwachs-Paradox*. Das endgültige Ergebnis stellt Partei A zwar um 26 000 Stimmen besser und Partei E um 5 000 Stimmen schlechter. Das letzte Mandat geht aber nicht wie vorher an A, sondern jetzt an E. Das Wachstum von A im Vergleich zum Rückgang bei E wird von der Hare–Niemeyer-Methode mit der Wegnahme eines Mandats geahndet.[32] Siehe Tabelle 8.

Das Beispiel in Tabelle 9 beweist, daß das Stimmenzuwachs-Paradox bei *jeder* Quotenmethode auftreten kann und nicht an den Restausgleich gebunden ist. Ursache für das Malheur ist schon allein die Erstzuteilung, die allen Quotenmethoden gemeinsam ist.[33]

---

[29] Vergleiche die "$x + 2$ Ausschüsse" im 12. Deutschen Bundestag 1990–1994 ([54], S. 709).

[30] *Michel L. Balinski / H. Peyton Young* [1], S. 44, 70, dort unter dem Namen *new state paradox*.

[31] Aus *Klaus Kopfermann* [3], S. 115, dort unter dem Namen *Neue-Parteien-Syndrom*. Der Autor fährt fort: "Dieses Phänomen ist kaum als Paradoxon anzusprechen. Ganz im Gegenteil. Es spricht für das Verfahren der größten Reste." Ob Syndrom, Phänomen oder Paradoxon, der apologetische Komparativ *Je verkehrter, umso gelehrter!* kann nicht als Handlungsmaxime einer allgemeinen Wissenschaftlichkeit gelten.

[32] Siehe das *population paradox* in *Michel L. Balinski / H. Peyton Young* [1], S. 43, 70.

[33] Siehe *H. Peyton Young* [10], S. 60–61. Die möglichen Quotenzuteilungen in Tabelle 9 sind eingeschränkt durch die Bedingung, daß, wenn eine Partei mehr Stimmen hat als eine zweite, die erste mindestens soviele Mandate zugeteilt bekommt wie die zweite. Ohne diese einschränkende Bedingung würde man gleich das nächste Paradox kreieren.

Tabelle 6: Parteienzuwachs-Paradox der Hare–Niemeyer-Methode I
Ausschußbesetzung in einem fiktiven Bundestag

	A	B	C	D	Divisor
Fraktionsstärken	320	238	79	17	
Zuteilung für einen Ausschuß mit 37 Sitzen ohne Partei D					
Hare–Niemeyer	18	14	5	-	
Sainte-Laguë	18	14	5	-	17.4
d'Hondt	19	14	4	-	16.4
Zuteilung für einen Ausschuß mit 37 + 1 Sitzen mit Partei D					
Hare–Niemeyer	19	14	4	1	
Sainte-Laguë	18	14	5	1	17.4
d'Hondt	19	14	4	1	16.4

Gemäß Quote ($637/37 = 17.2$) wird für die Neupartei D ein "Überhangsitz" geschaffen. Obwohl die Stimmenverhältnisse zwischen den Altparteien A, B, C nicht berührt werden, verschiebt die Hare–Niemeyer-Zuteilung ein Mandat von C nach A. Divisormethoden, wie die von Sainte-Laguë oder die von d'Hondt, vermeiden dieses Parteienzuwachs-Paradox.

Tabelle 7: Parteienzuwachs-Paradox der Hare–Niemeyer-Methode II (Quelle: [3])
Verkehrung der Sitzzuteilung durch Hinzutritt einer Partei ohne Mandat

	A	B	C	D	Divisor
Stimmen	4223	3539	1924	314	
Zuteilung von 13 Mandaten ohne Partei D					
Hare–Niemeyer	6	5	2	-	
Sainte-Laguë	5	5	3	-	769
d'Hondt	6	5	2	-	700
Zuteilung von 13 Mandaten mit Partei D					
Hare–Niemeyer	5	5	3	0	
Sainte-Laguë	5	5	3	0	769
d'Hondt	6	5	2	0	700

Bei der Hare-Niemeyer-Methode wird die Mandatszuteilung an die Parteien A–C durch Hinzutritt von D beeinflußt, obwohl D nichts bekommt. Die Divisormethoden von Sainte-Laguë und d'Hondt sind frei von diesem Parteienzuwachs-Paradox.

12. Mandatszuwachs-Paradox

Das *Mandatszuwachs-Paradox* ist die berüchtigste Schwäche der Hare–Niemeyer-Methode: Wenn die Anzahl der Mandate wächst und es mehr zu verteilen gibt, wird möglicherweise einem der Beteiligten etwas weggenommen.[34]

[34] Vergleiche etwa die Hervorhebung der Rücksprünge in [54], S. 706–707.—In der US-Geschichte ist dieser Effekt unter dem Namen *Alabama paradox* bekannt. *Michel L. Balinski / H. Peyton Young* ([1], *passim*) beweisen, daß eine Zuteilungsmethode die genannten Paradoxien vermeidet genau dann, wenn es sich um eine Divisormethode handelt. Insbesondere treten die Paradoxien bei *jeder* Quotenmethode auf, nicht nur bei der mit Ausgleich nach größten Resten (Hare–Niemeyer).

Tabelle 8: Stimmenzuwachs-Paradox der Hare–Niemeyer-Methode
Vorläufiges und endgültiges Ergebnis einer fiktiven Bundestagswahl

	A	B	C	D	E	Divisor
Vorläufiges Ergebnis	17 140 354	16 082 960	3 427 196	3 424 315	3 265 407	
Zuteilung von 656 Mandaten						
Hare–Niemeyer	260	243	52	52	49	
Sainte-Laguë	260	243	52	52	49	66 050
d'Hondt	260	244	52	51	49	65 900
Stimmenänderung	+26 000	+24 000	+25 000	+30 000	−5 000	
Endgültiges Ergebnis	17 166 354	16 106 960	3 452 196	3 454 315	3 260 407	
Zuteilung von 656 Mandaten						
Hare–Niemeyer	259	243	52	52	50	
Sainte-Laguë	260	243	52	52	49	66 150
d'Hondt	260	243	52	52	49	66 020

Obwohl Partei A zu- und E abnimmt, verschiebt die Quotenmethode mit Ausgleich nach größten Resten (Hare–Niemeyer) ein Mandat von A nach E. Divisormethoden, wie die von Sainte-Laguë oder die von d'Hondt, vermeiden dieses Stimmenzuwachs-Paradox.

Tabelle 9: Stimmenzuwachs-Paradox bei allgemeinen Quotenmethoden
Vorläufiges und endgültiges Ergebnis einer fiktiven Wahl (Quelle: [10])

	A	B	C	D
Vorläufiges Ergebnis	752	101	99	98
Die beiden möglichen Quotenzuteilung von 7 Mandaten				
Idealanspruch	5.01	0.67	0.66	0.65
Quotenzuteilung 1	6	1	0	0
Quotenzuteilung 2	5	1	1	0
Stimmenänderung	+1	+276	−3	−1
Endgültiges Ergebnis	753	377	96	97
Die drei möglichen Quotenzuteilung von 7 Mandaten				
Idealanspruch	3.98	1.99	0.508	0.513
Quotenzuteilung 3	4	2	0	1
Quotenzuteilung 4	4	1	1	1
Quotenzuteilung 5	3	2	1	1

Das Stimmenzuwachs-Paradox bei Quotenmethoden beruht auf der Erstzuteilung, nicht auf dem Restausgleich. Jeder mögliche Übergang vom vorläufigen zum endgültigen Ergebnis stellt die wachsende Partei A schlechter und die schrumpfende Partei D besser.

Solche Rücksprünge müssen nicht nicht auf Einzelfälle beschränkt bleiben, sondern können überhand nehmen. Für die Beschlußfassung über die Sitzzuteilung an die US-Bundesstaaten im Jahre 1901 lagen den Parlamentariern Berechnungen vor, in denen bei einer Größe des Repräsentantenhaus von 350 bis 400 Mitgliedern der Bundesstaat Maine zwischen 3 und 4 Vertretern hin- und herhüpfte auf eine Art, die nur noch als Hohn empfunden werden konnte.[35] Siehe Tabelle 10. Es kann auch zwei Parteien gleichzeitig treffen, wie in Tabelle 11.

Die Existenz von Paradoxien irritiert, auch wenn sie praktisch kaum auftreten. Aber wer sie kennt, kann sie auftreten lassen. Natürlich zum Schaden des politischen Gegners, aber um welchen Preis?[36] Siehe Tabelle 12.

13. Abweichungen vom Idealanspruch

Vordergründig bestechen Quotenmethoden damit, daß sie die *Idealansprüche*

$$e_j = \frac{s_j}{q} = \frac{s_j}{S} M$$

entweder ab- oder aufrunden und ihre Zuteilungen m_j den dadurch definierten *Idealrahmen* $\lfloor e_j \rfloor \leq m_j \leq \lceil e_j \rceil$ immer einhalten.[37]

Was hat es mit den Idealansprüchen e_j auf sich? Sie sind ein *ideales* Maß und lassen außer acht, daß es nur ganze und keine gebrochenen Mandate gibt. Sie haben "nur" die Qualität eines *Anspruchs* und es ist zu prüfen, ob der Anspruch berechtigt ist und wie er befriedigt werden kann. Wie so oft neigt auch der Idealanspruch dazu, sich zu verselbständigen und eine absolute Verbindlichkeit zu reklamieren.

Für sich alleine genommen ist eine einzelne Zahl noch kein Teil. Es braucht den Vergleich mit konkurrierenden Teilen oder den Blick auf das Ganze. Hier sind zwei lehrreiche Beispiele. In Tabelle 13 fallen genau 44.00 Prozent der Stimmen an Partei A. Wieviele von 100 Mandaten stehen ihr zu? Ihr Idealanspruch beträgt ganze 44 Mandate, ohne Bezug auf etwaige Mitbewerber und deren Erfolge. Die Divisormethode mit Standardrundung (Sainte-Laguë) beachtet diese Verhältnismäßigkeit und teilt Partei A je nach Gesamtlage 44 oder 43 oder 45 Mandate zu.[38]

---

[35] Die Empörung des Representative Littlefield aus Maine hat die Qualität eines geflügelten Wortes: "... In Maine comes and out Maine goes. ... God help the State of Maine when mathematics reach for her and undertake to strike her down." (*Michel L. Balinski / H. Peyton Young* [1], S. 41).

[36] Siehe *Peter Kunth* [30], S. 317, und [55], S. 29, 37.

[37] *Michel L. Balinski / H. Peyton Young* [1], S. 14, sprechen zur Motivation von "ideal share" und "fair share", benutzen als formale Definition aber "quota" und folgen darin *Edward V. Huntington* [28]. Dagegen hat *Thomas Hare* mit "quota" die Quote $q = S/M$ bezeichnet und dies hat sich in den Politikwissenschaften so verfestigt. Natürlich ist die Umdeutung eines etablierten Begriffes der Konvergenz der Wissenschaften nicht gerade zuträglich. In neueren Arbeiten wird die Doppeldeutigkeit des Quotenbegriffs vermieden (*Michel L. Balinski / H. Peyton Young* [14], S. 25: *fair share*, *Michel L. Balinski / Svetlozar T. Rachev* [15], S. 11: *adjacency*).

[38] Siehe *Michel L. Balinski / H. Peyton Young* [11], S. 723, und *Edward V. Huntington* [28], S. 94–96.

Tabelle 10: Mandatszuwachs-Paradox der Hare–Niemeyer-Methode I
Beschlußvorlage für das US House of Representatives 1901 (Quelle: [1])

Gesamtsitzzahl	350–382	383–385	386	387–388	389–390	391–400
Zuteilung an Maine	3	4	3	4	3	4

Die Quotenmethode mit Ausgleich nach größten Resten (Hare–Niemeyer) hätte für Maine zu Sitzzuteilungen geführt, die mit wachsender Größe des US-Repräsentatenhauses wirr schwanken. Seither wird diese Zuteilungsmethode dort nicht mehr eingesetzt.

Tabelle 11: Mandatszuwachs-Paradox der Hare–Niemeyer-Methode II
Ausschußbesetzung in einem fiktiven Bundestag

	A	B	C	D	E
Fraktionsstärken	255	197	87	30	29
Hare–Niemeyer-Zuteilung bei einem Ausschuß mit ...					
10 Sitzen	4	3	1	1	1
11 Sitzen	5	4	2	0	0

Die Quotenmethode mit Ausgleich nach größten Resten (Hare–Niemeyer) kann Beteiligten weniger zuteilen, obwohl mehr zu vergeben ist. Seit 1980 benutzt der Bundestag zur Ausschußbesetzung die Divisormethode mit Standardrundung (Sainte-Laguë).

Tabelle 12: Mandatszuwachs-Paradox der Hare–Niemeyer-Methode III
Kreistagswahl im Wetteraukreis am 12. März 1989 (Quellen: [30, 55])

	SPD	CDU	Grüne	Rep.
Stimmen	62 058	47 253	11 123	10 780
Zugeteilte Kreistagsmandate	38	29	7	7
Besetzte Kreistagsmandate	38	29	7	5
Hare–Niemeyer-Zuteilung für einen Kreisausschuß mit ...				
9 Sitzen	4	3	1	1
10 Sitzen	5	4	1	0

Die Republikaner konnten die sieben zugeteilten Kreistagsmandate nicht besetzen, da ihre Liste nur fünf Bewerber benannte. Daraufhin gebrauchte die Kreistagsmehrheit das Mandatszuwachs-Paradox und verhinderte den Einzug der Republikaner in den Kreisausschuß, indem sie dessen Mitgliederzahl von neun auf zehn erhöhte.

Diese Sicht, nicht einen Anspruch einzeln und isoliert zu verabsolutieren, sondern mit Blick auf zwei oder gar mehr konkurrierende Ansprüche die Verhältnismäßigkeit zu prüfen, erklärt die Unterschiede zwischen der Sainte-Laguë- und der Hare–Niemeyer-Zuteilung. Der mittlere Fall in Tabelle 13 mag dies noch einmal veranschaulichen. Die Parteien A und E weisen einen Idealanspruch von 44.00 und 5.60 Mandatsbruchteilen vor, wenn es insgesamt 100 Mandate gibt. Zusammen erhalten sie von beiden Methoden 49 Mandate, für die sich Idealansprüche von 43.47 bzw. 5.53 Mandatsbruchteilen errechnen. Diese werden gerade von der Sainte-Laguë-Methode mit der Zuteilung 43 / 6 befriedigt, nicht aber von der Hare–Niemeyer-Zuteilung 44 / 5. *Alle* Diskrepanzen—in Tabelle 13 oder anderswo—führen bei einem solchen paarweisen Vergleich zu der Sainte-Laguë-Zuteilung.[39]

Aus demselben Grund es ist für alle Beteiligten von Nachteil, auf der Einhaltung des Idealrahmens rigoros zu bestehen. Ein Verlassen dieses Rahmens kann sowohl nach unten wie nach oben wünschenswert sein. So werden in Tabelle 14 der Partei A bei Idealansprüchen von 83.17 bzw. 83.77 Mandatsbruchteilen von der Sainte-Laguë-Methode 82 bzw. 85 Mandate zugeteilt, die also einmal nach unten und das andere Mal nach oben aus dem Idealrahmen herausspringen. Es ist erkennbar, daß diese Zuteilungen den Verhältnissen besser angepaßt sind, als wollte man den Rahmen der Idealansprüche strikt einhalten.

Quotenmethoden halten den Idealrahmen zwar ein, sind jedoch deshalb (Tabelle 9) Opfer der Parteienzuwachs-, Stimmenzuwachs- und Mandatszuwachs-Paradoxien. Divisormethoden sind frei von den Paradoxien und springen gelegentlich aus dem Idealrahmen heraus.[40]

Bei der Divisormethode mit Abrundung (d'Hondt) kann ein Sprung aus dem Idealrahmen sehr häufig beobachtet werden und dann immer nach oben hinaus zu Gunsten einer großen Partei. Bei der Divisormethode mit Standardrundung (Sainte-Laguë) ist diese Einseitigkeit nicht gegeben, wie Tabelle 14 belegt.[41] Zudem ist für diese Methode eine Verletzung des Idealrahmens äußerst rar und wäre jedenfalls weder in der 200jährigen Geschichte des US-Repräsentantenhauses eingetreten noch in den deutschen Datensätzen, die wir anläßlich des vorliegenden Aufsatzes untersucht haben. Eine Situation wie in Tabelle 14 bleibt eine mathematisch konstruierte Ausnahme, die in der Praxis extrem selten auftritt.[42]

---

[39] Genauer beweist *H. Peyton Young* [10], S. 50: Unter allen Zuteilungsmethoden ist die Sainte-Laguë-Methode die einzige, die die Zwei-Parteien-Zuteilungen—diese sind wohl unumstritten—konsistent auf beliebig viele Parteien erweitert.

[40] *Michel L. Balinski / H. Peyton Young* [1], S. 70, 79, 82.

[41] Für jede d'Hondt-Zuteilung m_j gilt $\lfloor e_j \rfloor \leq m_j \leq \lfloor e_j \rfloor + p$, sie kann also den Idealrahmen nur nach oben verlassen und zwar um höchstens so viele Mandate wie Parteien am Zuteilungsverfahren teilnehmen.—Für jede Sainte-Laguë-Zuteilung m_j gilt $\lfloor e_j \rfloor - p/2 \leq m_j \leq \lceil e_j \rceil + p/2$, sie kann also den Idealrahmen nach oben oder unten verlassen und zwar höchstens um halb so viele Mandate wie Parteien teilnehmen. Beispiele für große Abweichungen vom Idealanspruch findet man in *Michel L. Balinski / H. Peyton Young* [11], S. 721.—Soweit also der "Rahmen der durch das Sitzverteilungsverfahren ohnehin vorgegebenen und unvermeidlichen Differenzierung" (BVerfGE [57], Bd. 79, S. 172) die Abweichung vom Idealanspruch meint, kann die Mathematik dafür Schranken bereitstellen. Interessiert nicht der ungünstigste, sondern der wahrscheinlichste oder der erwartete Fall, werden die Schranken noch einmal deutlich enger.

[42] Hier ist ein Beispiel, in dem es aber nicht um Mandate, sondern nur um Zehntelprozente zum Zweck der Berichterstattung geht. Bei den russischen Präsidentschaftswahlen vom 16. Juni 1996 erzielte im Autonomen Kreis der Chanten und Mansen der Bewerber Jeltsin den Idealanspruch von 53.17 Prozent, der von der Sainte-Laguë-Methode auf 53.0 Prozent gerundet wird (*Maximilian Happacher / Friedrich Pukelsheim* [25], Table 1).

Tabelle 13: Verhältnismäßigkeit der Sainte-Laguë-Methode I
Abweichung von ganzzahligen Idealansprüchen je nach Gesamtlage

	A	B	C	D	E	Divisor
Idealanspruch	44.00	38.57	5.82	5.81	5.80	
Sainte-Laguë = H.–N.	44	38	6	6	6	101.7
Idealanspruch	44.00	39.17	5.62	5.61	5.60	
Sainte-Laguë	43	39	6	6	6	101.4
Hare–Niemeyer	44	39	6	6	5	
Idealanspruch	44.00	39.77	5.42	5.41	5.40	
Sainte-Laguë	45	40	5	5	5	98.7
Hare–Niemeyer	44	40	6	5	5	

Die Divisormethode mit Standardrundung (Sainte-Laguë) achtet auf die Verhältnismäßigkeit der Zuteilung. Trotz Idealanspruchs von genau 44 Prozent erhält Partei A von den 100 Mandaten je nach Gesamtlage entweder 44 oder 43 oder 45 Mandate.

Tabelle 14: Verhältnismäßigkeit der Sainte-Laguë-Methode II
Sprengung des von den Idealansprüchen gesetzten Rahmens

	A	B	C	D	Divisor
Idealanspruch	83.17	5.62	5.61	5.60	
Sainte-Laguë	82	6	6	6	101
Hare–Niemeyer	83	6	6	5	
Idealanspruch	83.77	5.42	5.41	5.40	
Sainte-Laguë	85	5	5	5	99
Hare–Niemeyer	84	6	5	5	

Die Divisormethode mit Standardrundung (Sainte-Laguë) sprengt den Verhältnissen gemäß gelegentlich den Rahmen, den die Idealansprüche setzen. Im ersten Fall liegt die Zuteilung darunter, $82 = m_1 < \lfloor e_1 \rfloor = 83$, im zweiten Fall darüber, $85 = m_1 > \lceil e_1 \rceil = 84$.

Daß die Divisormethode mit Standardrundung (Sainte-Laguë) meistens im Rahmen des Idealanspruch bleibt und nur ganz selten hinausspringt, hat einen guten Grund. Dazu sei die flexiblere Forderung definiert, die Zuteilungen mögen *nahe den Idealansprüchen* liegen in dem Sinn, daß die Übertragung eines Mandats von einer Partei zu einer anderen nicht beide Parteien näher an ihre Idealansprüche heranbringt. *Michel L. Balinski / H. Peyton Young* beweisen, daß unter allen Divisormethoden die von Sainte-Laguë als einzige die Eigenschaft besitzt, daß ihre Zuteilungen in diesem Sinn nahe den Idealansprüchen ist. Dies ist eine (der vielen) Eigenschaften, die die Sainte-Laguë-Methode auszeichnet.[43]

[43] [1], S. 132. Siehe auch S. 130: Bei Zwei- und Dreiparteien-Problemen bleibt die Sainte-Laguë-Zuteilung *immer* innerhalb des Idealrahmens.

14. Unterschiede zwischen den Erfolgswerten zweier Wählerstimmen

Den Grundsatz des gleichen Erfolgswert der Wählerstimmen hat das Bundesverfassungsgericht seit Beginn seiner Tätigkeit formuliert und ist ihm in ständiger Rechtsprechung treu geblieben.[44] Dieser Grundsatz liegt genauso ausgesprochen auch vielen mathematischen Untersuchungen zugrunde. So sagt etwa *André Sainte-Laguë* 1910: "Pour que l'égalité des bulletins de vote soit aussi complète que possible, chacun des S électeurs doit avoir la même part d'influence."[45] Oder *Georg Pólya* 1919: "Das Prinzip des gleichen Wahlrechts fordert die möglichst gleichmäßige Berücksichtigung der Wünsche aller Wähler, aber nicht die der Parteien, als solcher."[46] Inwieweit kann dieser Grundsatz quantitativ erfaßt werden?

Die Mathematik bietet eine grenzenlose Vielfalt von Funktionen, die als Abweichungsmaße dienen können. Zu jeder Zuteilungsmethode kann man eine Zielfunktion konstruieren, die gerade durch die vorgegebene Methode optimiert wird.[47] "Das Wahlrecht hat sich aber nicht an abstrakt konstruierten Fällen, sondern an der politischen Wirklichkeit zu orientieren."[48] Die derzeitige deutsche Verfassungswirklichkeit gibt für Verhältniswahlen das Ziel vor, gleichen Erfolgswert der Wählerstimmen anzustreben.[49]

Zusammengenommen führen die s_j Stimmen, die die Partei j erhält, zu einem Erfolg von m_j Mandaten. Eine einzelne Stimme ist an diesem Erfolg mit dem Bruchteil m_j/s_j beteiligt. Als *Erfolgswert einer für die Partei j abgegebenen Stimme* definieren wir deshalb diesen Quotienten m_j/s_j.

---

[44] BVerfGE [57], Bd. 1, S. 244–248, Bd. 95, S. 371.

[45] [41], S. 377.

[46] [37], S. 308.—*George Pólya* (* 1887, † 1985) war einer der großen Mathematiker unseren Jahrhunderts. Sein Fotoalbum [6] mit Bildern mathematischer Berühmtheiten ist ein Dokument der Wissenschaftsgeschichte, sein Buch *How To Solve It* wurde in mindestens 17 Sprachen übersetzt (dt. *Schule des Denkens*) und mehr als eine Million mal verkauft. Pólyas didaktischer Genius blitzt auf in seiner "kleinen Erzählung" von den drei Strafrichtern ([36], S. 367–368), in der er die hier anstehende Problematik glänzend veranschaulicht.

[47] Siehe *Horst Niemeyer / Gottfried Wolf* [34], S. T341, oder *H. Peyton Young* [10], S. 189.—Manche Autoren publizieren über Abweichungsmaße, ohne irgendetwas von der unendlichen Literatur zu diesem Thema zu rezipieren. Ein Beispiel solcher zweifelhaften Selbstgenügsamkeit ist der *distortion* Begriff von *John Loosemore / Victor J. Hanby* [32], S. 468, und seine Verwendung in *Rein Taagepera / Matthew S. Shugart* [8].—In den Naturwissenschaften ist das Ziel häufig enger definiert und weniger umstritten. Zum Beispiel führt in der statistischen Versuchsplanung die Forderung der Effizienzmaximierung unter allen Rundungsmethoden zwingend zur Divisormethode mit Aufrundung (*John Quincy Adams*), siehe *Friedrich Pukelsheim / Sabine Rieder* [39]. Die Stichprobentheorie verlangt nach Varianzminimierung und führt zur Divisormethode mit Abrundung (d'Hondt), siehe *Friedrich Pukelsheim* [38], *Gregor Dorfleitner / Thomas Klein* [19].—Für statistische Tabellen empfiehlt *Howard Wainer* [47] die Divisormethode mit Standardrundung (Sainte-Laguë). Alle Prozentangaben im vorliegenden Aufsatz sind damit berechnet und summieren sich deshalb immer genau zu 100 Prozent. Der Educational Testing Service, eine der großen statistischen Behörden der USA, wird zukünftig die Sainte-Laguë-Methode in allen seinen statistischen Veröffentlichungen verwenden. Erläuterungen wie "Die in einigen Tabellen auftretenden geringfügigen Abweichungen in den Summen sind durch Auf- und Abrunden bedingt." ([66], S. 6) werden dadurch gegenstandslos.

[48] BVerfGE [57], Bd. 82, S. 344.

[49] Aber selbst bei dieser Einengung bleiben noch diverse Möglichkeiten der mathematischen Präzisierung.

Der Unterschied des Erfolgwertes zweier Stimmen, wovon eine auf die Partei j und die andere auf die Partei k entfällt, berechnet sich also zu $m_j/s_j - m_k/s_k$. Das Ziel des gleichen Erfolgswerts aller Wählerstimmen gebietet es, durch Wahl der Zuteilungsmethode diese paarweisen Unterschiede in vernünftigem Maß klein zu machen.

Welches Gütemaß kann in der politischen Wirklichkeit bestehen? Ein überzeugendes Maß sind die betragsmäßigen Unterschiede

$$\left| \frac{m_j}{s_j} - \frac{m_k}{s_k} \right|.$$

In der Tat gibt es genau eine Zuteilungsmethode, für die die betragsmäßigen Unterschiede der Erfolgswerte von auf zwei Parteien entfallenden Stimmen nicht mehr dadurch verkleinert werden können, daß ein Mandat von der einen Partei zur anderen transferiert wird. Dies ist die Divisormethode mit Standardrundung (Sainte-Laguë).[50]

Zur Illustration greifen wir noch einmal auf den Fall in Tabelle 13 zurück, in dem die Parteien A und E Stimmenanteile von 44.00 und 5.60 erringen. Der Erfolgswertunterschied für die Sainte-Laguë-Zuteilung von 43 / 6 Mandaten beträgt $9.4/S$ und ist deutlich kleiner als der Wert $10.7/S$, der sich für die Hare–Niemeyer-Zuteilung 44 / 5 ergibt.[51]

Es stellt sich weniger die Frage, ob das Ziel der Erfolgswertgleichheit nur so mathematisiert werden kann, daß die betragsmäßigen Unterschiede so annehmbar wie möglich ausfallen, wie wir es gerade beschrieben haben. Vielmehr ist mit Befriedigung festzustellen, daß diese Präzisierung mit der geforderten Erfolgswertgleichheit der Wählerstimmen schönstens harmoniert und darüberhinaus unter allen Zuteilungsmethoden eine auszeichnet, nämlich die von Sainte-Laguë.

[50] Siehe *Michel L. Balinski / H. Peyton Young* [1], S. 101.—Die Idee des Abbaus paarweise Unterschiede geht auf *Edward V. Huntington* zurück. Er diskutiert insgesamt 64 Wege ([28], S. 107), die Unterschiede numerisch zu bewerten. Aus Sicht der Erfolgswertgleichheit hat davon wohl nur die Betrachtung der *relativen* betragsmäßigen Unterschiede Bestand; diese Forderung führt zur Divisormethode mit geometrische-Mittel-Rundung.

[51] Aus den Idealansprüchen $e_j = Ms_j/S$ erhält man $s_j = Se_j/M$. Bei Mandatszahl $M = 100$ ergibt sich

$$\left| \frac{m_A}{s_A} - \frac{m_E}{s_E} \right| = \left(\frac{6}{0.056} - \frac{43}{0.44} \right) \frac{1}{S} = \frac{9.4}{S} \qquad \text{bzw.} \qquad \left| \frac{m_A}{s_A} - \frac{m_E}{s_E} \right| = \left(\frac{44}{0.44} - \frac{5}{0.056} \right) \frac{1}{S} = \frac{10.7}{S}.$$

15. Abweichungsmaße vom gleichen Erfolgswert aller Wählerstimmen

Seine Originalarbeiten motiviert *André Sainte-Laguë* mit dem Ziel, eine Maßzahl zu minimieren, die *alle* Abweichungen der Erfolgswerte der Stimmen von dem idealen Erfolgswert M/S erfaßt:[52]

$$s_1\left(\frac{m_1}{s_1}-\frac{M}{S}\right)^2+\cdots+s_p\left(\frac{m_p}{s_p}-\frac{M}{S}\right)^2.$$

Das heißt, jede der s_1 Stimmen für die erste Partei steuert einen durch das Abweichungsquadrat $(m_1/s_1 - M/S)^2$ gemessenen Beitrag zum Gesamtfehler bei usw. bis zur letzten Partei p. Sainte-Laguë wählt also als globales Abweichungsmaß gerade die Summe der Abweichungsquadrate zwischen den vielen realisierten und dem einen idealisierten Erfolgswert. Zur Rechtfertigung beruft er sich auf die Autorität von *Carl Friedrich Gauß*, der diese *Methode der Kleinsten Quadrate* in die Naturwissenschaften eingeführt habe. Sainte-Laguë beweist dann, daß es genau eine Zuteilungsmethode gibt, die diese Summe der Abweichungsquadrate so klein wie möglich macht, nämlich die—nun mit seinem Namen verbundene—Divisormethode mit Standardrundung.

Es ist müßig zu missionieren, dieses Abweichungsmaße sei das einzige, das der Natur der Sache gerecht würde. Aber es befriedigt außerordentlich, daß der Ansatz von Sainte-Laguë und somit auch seine Zuteilungsmethode mit dem Grundsatz des gleichen Erfolgswertes in sichtbar bestem Einklang steht.[53]

Der Grundsatz des gleichen Erfolgswertes aller Wählerstimmen läßt sich auch erhellen im Kontrast zum denkbaren Grundsatz der gleichen Repräsentationsquote aller Mandate. Wir

---

[52] [41, 42].

[53] Die Methode verträgt sich auch allerbestens mit den Verfahren der mathematischen Statistik. Mit den Idealansprüchen $e_j = s_j M/S$ läßt sich die Summe der Abweichungsquadrate schreiben als

$$\sum_{j=1}^{p} s_j\left(\frac{m_j}{s_j}-\frac{M}{S}\right)^2=\frac{M}{S}\sum_{j=1}^{p}\frac{(m_j-e_j)^2}{e_j}.$$

Letztere Summe ist der Chiquadrat-Abstand der Mandatsverteilung zur Stimmenverteilung. Die Divisormethode mit Standardrundung (Sainte-Laguë) ist also die Minimum-Chiquadrat-Anpassung an die Stimmenverteilung.—Im Gegensatz dazu verliert die Summe der *Beträge* der Abweichungen den Bezug auf die Wählerstimmen:

$$\sum_{j=1}^{p} s_j\left|\frac{m_j}{s_j}-\frac{M}{S}\right|=\sum_{j=1}^{p}\left|m_j-e_j\right|.$$

Statt dessen verbleiben die an den Parteien begangenen Fehler, gemessen durch die Summe der Abweichungsbeträge zu den Idealansprüchen. Diese Kennzahl wird minimiert von der Quotenmethode mit Ausgleich nach größten Resten (Hare–Niemeyer).—Die Divisormethode mit Abrundung (d'Hondt) minimiert die größtmögliche positive Abweichung, $\max_j\,(m_j/s_j - M/S)$.—Diese und viele verwandte Optimalitätsaussagen sind in *Michel L. Balinski / H. Peyton Young* [1], S. 98–105, zusammengestellt und bewiesen.

nennen s_j/m_j die *Repräsentationsquote für ein der Partei j zugeteiltes Mandat*. Dies sind also die Stimmbruchteile, die auf jedes der von der Partei j gewonnene Mandat entfallen.

Wiederum kann man die Unterschiede zwischen den Repräsentationsquoten je zweier Mandaten anzugleichen versuchen,

$$\left| \frac{s_j}{m_j} - \frac{s_k}{m_k} \right| .$$

Oder man minimiert als globales Maß die über alle M Mandate summierten Abweichungsquadrate,

$$m_1 \left(\frac{s_1}{m_1} - \frac{S}{M} \right)^2 + \cdots + m_p \left(\frac{s_p}{m_p} - \frac{S}{M} \right)^2 .$$

Beide Forderungen führen zu eindeutig bestimmten Divisormethoden, die erste zu der mit harmonischer-Mittel-Rundung und die zweite zu der mit geometrische-Mittel-Rundung.[54]

Die Divisormethode mit geometrische-Mittel-Rundung wurde von *Edward V. Huntington* unter dem gewinnenden Namen *method of equal proportions* propagiert und wird seit 1941 in den USA für die Zuteilung der Sitze des Repräsentantenhauses an die Bundesstaaten verwendet. Sie liefert fast dieselben Zuteilungsergebnisse wie die Divisormethode mit Standardrundung (Sainte-Laguë), aber nicht ganz. Versuche, sie auf juristischem Weg anzugreifen, scheiterten.[55]

Der gesamtgesellschaftliche Rahmen ist eben in den USA ein anderer als in Deutschland. In der amerikanischen Literatur wird neben dem gleichen Erfolgswert der Wählerstimmen immer auch die gleiche Repräsentationsquote der Mandate ins Feld geführt. Das ist leicht einsichtig. Bei uns sind die Wählerstimmen, die den Repräsentationsquote eines Mandates ausmachen, abstrakte Größen und nicht greifbar. In den USA sind diese Stimmen konkret und faßbar, sie gehören nämlich zu den Stimmbürgern des *congressional district*, die den Mandatsträger wählen werden. Die Repräsentationsquote der Mandate ist also dasselbe wie die Zahl der Wahlberechtigten und wird so zu einem operationalen Mittel, dem Zweck der gleichen Wahl zu dienen.

Kehren wir nach Deutschland zurück. Das Bundesverfassungsgericht steht zum Grundsatz des gleichen Erfolgswertes, solange es mit Worten überzeugen kann. Wenn es mit Zahlen rechnen muß, nimmt es die Repräsentationsquote der Mandate her! Die Irritationen, die ein solcher Schwenk in einem Mathematiker auslöst, sind sicher unerheblich. Erheblich sind die Ergebnisse, sie fallen mal so aus und mal anders. Der Erfolgswert-Grundsatz deutet auf

[54] Für Einzelheiten siehe *Michel L. Balinski / H. Peyton Young* [1], S. 99, dort benannt nach *James Dean* und *Joseph A. Hill*.

[55] [51, 64]. Siehe den zusammenfassenden Bericht von *Lawrence R. Ernst* [20].

eine Zuteilungsmethode, der Repräsentationsquoten-Grundsatz auf eine andere. Was unter dem einen Grundsatz verfassungskonform ist, wird unter dem anderen verfassungswidrig, wie wir am Beispiel der Überhangmandate im einzelnen ausführen werden.

16. Überhangmandate

Das deutsche Wahlsystem enthält auch Elemente der Mehrheitswahl, die zu Überhangmandaten führen können. Über deren Beurteilung gehen die Meinungen auseinander, auch das Bundesverfassungsgericht ist—jedenfalls in seinem Urteil 1997—gespalten.[56] Unsere Ausführungen über Zuteilungsmethoden sind dem Bereich der Verhältniswahlen zuzuordnen. Ein Wechsel der Zuteilungsmethode ändert an der Problematik nichts.

Tabelle 15 zeigt die Auswertung der Wahlen von 1994 mittels der Divisormethode mit Standardrundung (Sainte-Laguë) und mittels der derzeit gültigen Quotenmethode mit Ausgleich nach größten Resten (Hare–Niemeyer).[57] Bei beiden Methoden kommt es zu 16 Überhangmandaten, einmal in der Aufteilung 4 / 12 und das andere Mal 3 / 13 für SPD bzw. CDU.

Ein systemtreuer und vollständiger Verhältnisausgleich wäre für diese Daten bei 891 Mandaten erreicht. Tabelle 16 läßt die Reihenfolge erkennen, in der die Sainte-Laguë-Methode die Überhangmandate abbauen würde. Hätten die Direktmandate nicht die Hälfte, sondern etwa nur 45 bzw. 40 Prozent aller Mandate ausgemacht, wären nur noch acht bzw. zwei Überhangmandate zustandegekommen (bei 735 bzw. 811 Bundestagsmitgliedern). Würden also von den Sitzen im Bundestag nicht die Hälfte, sondern weniger in Direktwahl besetzt, hätte dies direkte und meßbare Auswirkungen auf die Zahl der Überhangmandate. Dies liefe allerdings der jungen deutschen Tradition zuwider, in der die Hälfte oder mehr—und nicht weniger—der Parlamentsmitglieder in Direktwahl bestimmt werden. Solche Alternativen dürften also über den Konjunktiv kaum hinauskommen.

Das Bundesverfassungsgericht urteilt optimistisch, der Bundestag habe einen Korrekturbedarf erkannt, und wartet auf den erklärten gesetzgeberischen Willen. In der Debatte über das Gesetz zur Neueinteilung der Wahlkreise gehen die Sprecher der beiden Parteien, die von den Überhangmandaten profitieren, darauf mit keinem Wort ein.[58] Warum auch sollten die großen Parteien mit ihren Mehrheiten Besonderheiten des Wahlsystems abschaffen,

[56] BVerfGE [57], Bd. 95, S. 335–367 die Begründung der einen vier Richter, deren Auffassung das Urteil trägt, S. 367–407 die abweichende Meinung der anderen vier.—Siehe auch *Bernhard Vogel / Dieter Nohlen / Rainer-Olaf Schultze* [9], S. 57.

[57] Bei fehlendem Tabelleneintrag in einer Hare–Niemeyer-Zeile sind die Daten mit denen in der direkt darüberstehenden Sainte-Laguë-Zeile identisch.

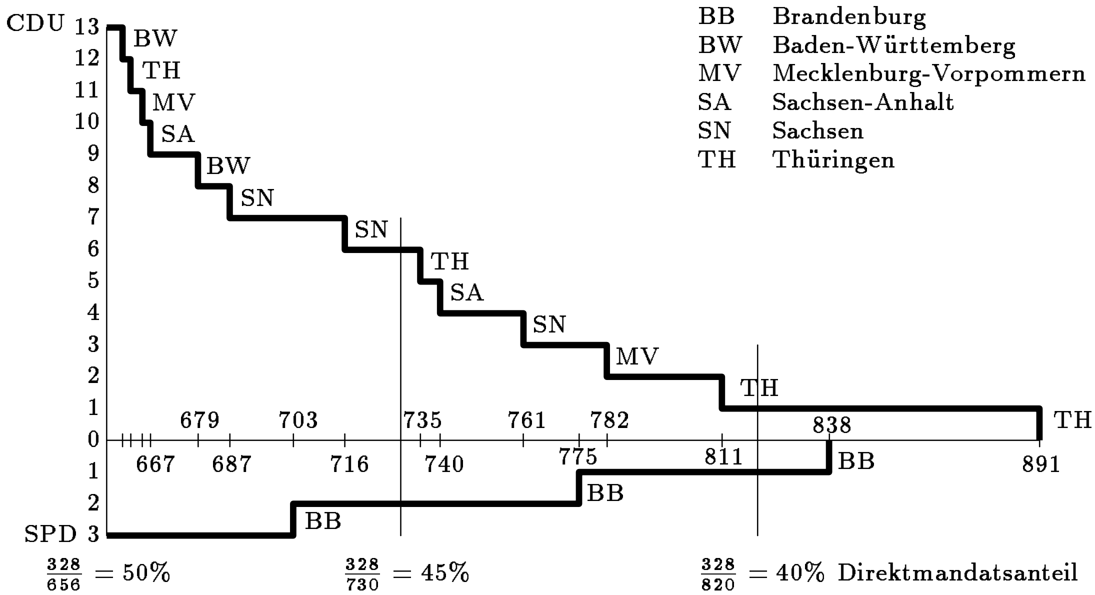
[58] BVerfGE [57] Bd. 335, S. 367, und [52], S. 12.

Tabelle 15: Sainte-Laguë-Methode und Hare–Niemeyer-Methode bei Bundestagswahlen
Wahl zum 13. Deutschen Bundestag am 16. Oktober 1994 (Quelle [66])

	SPD: %	CDU/CSU: %	B90-Grü: %	FDP: %	PDS: %
Zuteilung der 656 Mandate an die Parteien (Divisor für Sainte-Laguë 69 220)					
Zweitstimmen	17 140 354: 37.8	16 089 960: 35.4 /3 427 196: 7.5	3 424 315: 7.5	3 258 407: 7.2	2 066 176: 4.6
Sainte-Laguë=H.-N.	248: 37.8	232: 35.3 /50: 7.6	49: 7.5	47: 7.2	30: 4.6
Weiterverteilung auf die Landeslisten (Prozentangaben beziehen sich auf Spaltensummen)					
1. *Schleswig-Holstein*	670 791: 3.9	702 367: 4.4	140 353: 4.1	126 036: 3.9	18 989: 0.9
Sainte-Laguë=H.-N.	10: 4.0	10: 4.3	2: 4.1	2: 4.3	0: 0.0
2. *Hamburg*	389 857: 2.3	343 398: 2.1	123 571: 3.6	71 119: 2.2	21 996: 1.1
Sainte-Laguë=H.-N.	6: 2.4	5: 2.2	2: 4.1	1: 2.1	0: 0.0
3. *Niedersachsen*	1 938 321: 11.3	1 971 664: 12.3	338 087: 9.9	368 180: 11.3	46 731: 2.3
Sainte-Laguë	28: 11.3	29: 12.5	5: 10.2	5: 10.6	1: 3.3
Hare–Niemeyer		28: 12.0			
4. *Bremen*	179 311: 1.0	119 063: 0.7	43 654: 1.3	28 409: 0.9	10 744: 0.5
Sainte-Laguë	3: 1.2	2: 0.9	1: 2.0	0: 0.0	0: 0.0
Hare–Niemeyer	1ü← 2: 0.8				
5. *Nordrhein-Westfalen*	4 534 820: 26.4	3 997 317: 24.9	781 405: 22.8	804 024: 24.6	102 356: 4.9
Sainte-Laguë	65: 26.3	58: 25.0	11: 22.5	12: 25.6	1: 3.3
Hare–Niemeyer	66: 26.7				
6. *Hessen*	1 296 788: 7.6	1 417 692: 8.8	322 473: 9.4	283 186: 8.7	37 268: 1.8
Sainte-Laguë	19: 7.7	20: 8.6	4: 8.2	4: 8.5	1: 3.3
Hare–Niemeyer			5: 10.2		
7. *Rheinland-Pfalz*	955 383: 5.6	1 061 643: 6.6	150 630: 4.4	168 475: 5.2	15 135: 0.7
Sainte-Laguë	14: 5.7	15: 6.5	2: 4.1	3: 6.4	0: 0.0
Hare–Niemeyer				2: 4.3	
8. *Baden-Württemberg*	1 742 592: 10.2	2 451 917: 15.2	544 782: 15.9	560 734: 17.2	42 994: 2.1
Sainte-Laguë	25: 10.1	2ü← 35: 15.1	7: 14.3	8: 17.0	1: 3.3
Hare–Niemeyer			8: 16.3		
9. *Bayern*	1 983 979: 11.6	3 427 196 CSU	419 763: 12.2	430 125: 13.2	36 575: 1.8
Sainte-Laguë	28: 11.3	50 CSU	6: 12.3	6: 12.8	1: 3.3
Hare–Niemeyer	29: 11.7				
10. *Saarland*	329 287: 1.9	250 978: 1.6	39 013: 1.1	29 334: 0.9	4 807: 0.2
Sainte-Laguë	5: 2.0	4: 1.7	1: 2.0	0: 0.0	0: 0.0
Hare–Niemeyer			0: 0.0		
11. *Berlin*	663 081: 3.9	612 217: 3.8	199 208: 5.8	100 649: 3.1	289 517: 14.0
Sainte-Laguë	10: 4.0	9: 3.9	3: 6.1	2: 4.3	4: 13.4
Hare–Niemeyer	9: 3.6				
12. *Mecklenburg-Vorp.*	283 029: 1.7	378 274: 2.4	35 213: 1.0	33 436: 1.0	231 835: 11.2
Sainte-Laguë	4: 1.6	2ü← 5: 2.2	0: 0.0	0: 0.0	3: 10.0
Hare–Niemeyer				1: 2.1	
13. *Brandenburg*	617 362: 3.6	385 383: 2.4	39 593: 1.2	35 954: 1.1	264 239: 12.8
Sainte-Laguë	3ü← 9: 3.6	6: 2.6	1: 2.0	1: 2.1	4: 13.4
Hare–Niemeyer			0: 0.0		
14. *Sachsen-Anhalt*	502 193: 2.9	582 294: 3.6	53 551: 1.6	60 968: 1.9	270 212: 13.1
Sainte-Laguë=H.-N.	7: 2.8	2ü← 8: 3.4	1: 2.0	1: 2.1	4: 13.4
15. *Thüringen*	431 940: 2.5	586 440: 3.6	70 425: 2.1	59 284: 1.8	245 086: 11.9
Sainte-Laguë	6: 2.4	4ü← 8: 3.4	1: 2.0	1: 2.1	4: 13.3
Hare–Niemeyer		3ü← 9: 3.9			
16. *Sachsen*	621 620: 3.6	1 229 313: 7.6	122 594: 3.6	98 494: 3.0	427 692: 20.7
Sainte-Laguë=H.-N.	9: 3.6	3ü← 18: 7.7	2: 4.1	1: 2.1	6: 20.0
Divisor für Sainte-Laguë	69 700	69 170	73 500	67 000	69 000

Überhangmandate (ü←) bei Sainte-Laguë SPD 3, CDU 13; bei Hare-Niemeyer SPD 4, CDU 12

Tabelle 16: Abbau von Überhangmandaten durch Vergrößerung des Bundestages
Wahl zum 13. Deutschen Bundestag am 16. Oktober 1994



Die Sainte-Laguë-Methode brächte für die SPD 3 und die CDU 13 Überhangmandate. Mit wachsender Größe des Bundestages wird bei 891 Mandaten ein vollständiger Verhältnisausgleich erreicht. Bei 730 Mandaten—d.h. 45 Prozent Direktmandaten—fallen noch acht Überhangmandate an, bei 820 Mandaten—d.h. 40 Prozent Direktmandaten—zwei.

die eben diesen Mehrheiten zugute kommen? Das Problem—so es denn eines ist—würde vermutlich anders gesehen, wenn zur Vermeidung von Überhangmandaten von den direkt gewählten Kandidaten die mit den wenigsten Stimmen ausscheiden und die betroffenen Wahlkreise statt dessen den Bewerber mit den zweitmeisten Stimmen entsenden.

Das Bundesverfassungsgericht skizziert eine Lösung des Problems, die sich an einem "Fünfprozentquorum"—bezogen auf die Gesamtzahl der Parlamentssitze—orientiert.[59] Hier wollen wir diese Idee zwar abgewandeln, aber durchaus verträglich mit der bisherigen Argumentation des Gerichts bleiben. Unser hypothetisches Fünfprozentquorum beziehen wir auf den Erfolgswert, der einer Wählerstimme für die einzelnen Partei zukommt.

Das eine Mal lassen die vier Überhangmandate den Erfolgswert einer Stimme für die begünstigte Partei um 1.61 Prozent wachsen, dies bleibt unter dem Quorum. Das andere Mal aber steigern die zwölf Überhangmandate den Erfolgswert um 5.17 Prozent; unter

[59] BVerfGE [57] Bd. 335, S. 366.

unserem hypothetischen Fünfprozentquorum ist das verfassungswidrig.[60]

So rechnet das Bundesverfassungsgericht aber *nicht*. Statt dessen nimmt es die Repräsentationsquoten der Mandate her.[61] Diese verbessern sich im ersten Fall um 1.59 Prozent und im zweiten Fall um 4.92 Prozent. Unter unserem hypothetischen Fünfprozentquorum macht die falsche Rechnung auch den zweiten Fall verfassungskonform.[62]

Gleicher Erfolgswert der Stimmen und gleiche Repräsentationsquote der Mandate sind zwei paar Stiefel. Die beiden Grundsätze zeichnen unter allen Zuteilungsmethoden zwei zwar unterschiedliche, aber noch konkordante Methoden aus. Die obige Beispielrechnung endet in zwei nicht nur unterschiedlichen, sondern auch diskordanten Ergebnissen.

17. Mehrheitsklausel

Ohne Zusatzregelung garantiert keine Zuteilungsmethode, daß einer absoluten Stimmenmehrheit auch eine absolute Mandatsmehrheit zugeteilt wird. Die Mandatsverteilung ist immer eine vergröbernde Anpassung an die Stimmenverteilung und eine solche Feinheit der Abbildung kann nicht garantiert werden. Bei der Quotenmethode mit Ausgleich nach größten Resten (Hare–Niemeyer) bietet es sich an, nach der Erstzuteilung ein Mandat aus dem Resteausgleich wegzunehmen, um die gewünschte Wirkung zu erzielen.[63]

Für Divisormethoden könnte man an zwei Vorgehensweisen denken. Erstens kann man die zuletzt zuzuteilenden Mandate an die Partei mit der absoluten Stimmenmehrheit umleiten, bis die absolute Mandatsmehrheit sichergestellt ist. Es geht aber auch ohne diesen Makel des Wegnehmens von Mandaten, auf die andere gerne Anspruch anmelden würden.

---

60 Die Wachstumsraten der Erfolgswerte berechnen sich wie folgt:

$$\frac{\frac{248+4}{17\,140\,354}-\frac{248}{17\,140\,354}}{\frac{248}{17\,140\,354}}=\frac{4}{248}=1.61\ \% \qquad \text{bzw.} \qquad \frac{\frac{232+12}{16\,089\,960}-\frac{232}{16\,089\,960}}{\frac{232}{16\,089\,960}}=\frac{12}{232}=5.17\ \%.$$

61 BVerfGE [57] Bd. 335, S. 359, 389, 398: Die Schaubilder unter dem Titel "Veränderung des Erfolgswerts ..." listen statt dessen die "Stimmen je Mandat" auf. Siehe schon Bd. 1, S. 254.—Die Urteilsbegründungen des Bundesverfassungsgericht würden an innerer Konsistenz gewinnen, wenn die Begrifflichkeiten qualitativ-verbal und quantitativ-operational deckungsgleich gehalten werden.

62 Die Wachstumsraten der Repräsentationsquoten sind

$$\frac{\frac{17\,140\,354}{248}-\frac{17\,140\,354}{248+4}}{\frac{17\,140\,354}{248}}=\frac{4}{252}=1.59\ \% \qquad \text{bzw.} \qquad \frac{\frac{16\,089\,960}{232}-\frac{16\,089\,960}{232+12}}{\frac{16\,089\,960}{232}}=\frac{12}{244}=4.92\ \%.$$

63 BWahlG [71] Art. 6 Abs. 3.

Zweitens kann man Zusatzmandate ins Leben rufen. Diese Überhangmandate anderer Art dürften eigentlich kein Streitpotential abgeben. Fast immer wird ein einziges Zusatzmandat reichen.[64] Und die Verbesserung des Erfolgswerts der Stimmen für die begünstigte Partei ist nicht ein umstrittener, sondern der ausdrückliche Zweck einer solchen Regelung.

18. Resümee

Wir stehen auf den Schultern von Riesen, sagt Bernard de Chartres, sagt Didacus Stella, sagt Newton.[65] Nicht die Größe prägt das Bild, sondern die Vielzahl. Mathematiker, Politikwissenschaftler, Verfassungsjuristen: Jeder nährt seinen eigenen Riesen, steht auf seiner Schulter—und schaut in eine andere Richtung.

Von der Interdisziplinarität unseres Themas ist erschreckend wenig zu finden, wenn man in der Literatur sucht. Die Wahlliteratur ist zugegebenermaßen eine unendliche Geschichte. Aber eben wegen dieser langen Tradition und des allgemeinen Interesses haben sich Begriffe und Maßstäbe herausgebildet, die die beteiligten Fachwissenschaften nicht umdeuten sollten, wenn sie von der Gesellschaft gehört werden wollen.

Das Wahlsystem, das sich Deutschland nach dem Zweiten Weltkrieg gegeben hat, bewährt sich bis zum Mythos des "deutschen Wahlwunders".[66] Jedenfalls ist es ein Exportschlager ersten Ranges, von Schottland bis Neuseeland.[67]

Zuteilungsmethoden sind nur ein kleines Rädchen im Wahlgetriebe. Die Erfahrung lehrt, daß jedes neue praktische Problem zu neuen theoretischen Einsichten führt.[68] Doch sollte im Laufe unsererer Ausführungen klar geworden sein, daß die Frage: Divisor oder Quote? *lege artis* nur eine Antwort zuläßt: Divisor!

---

[64] Aber theoretisch könnte die Zuteilung an die größte Partei gerade wie in Tabelle 14 den Idealrahmen sprengen und zwei oder mehr Zusatzmandate notwendig machen.

[65] Sagt *Robert K. Merton* [4], S. 268–69.

[66] Siehe *Max Kaase* [29], S. 161, *Dolf Sternberger* [44].

[67] Soweit Wahlsysteme überhaupt geändert werden, siehe *Dieter Nohlen* [35], S. 222.—Zu Neuseeland heißt es in [58], S. 47: "[The Royal Commission on the Electoral System] reported at the end of 1986, and recommended (among other things) that a referendum be held on whether New Zealand should adopt a new voting system based on that used in Germany since 1949. The Royal Commission called this new voting system 'Mixed Member Proportional', or MMP." Die drei offensichtlichsten Schwachstellen des deutschen Wahlsystems wurden dabei stillschweigend korrigiert: (1) Als Zuteilungsmethode wird die von Sainte-Laguë genommen. (2) Erst- und Zweitstimme haben inhaltliche Namen erhalten: Direktmandat-Stimme (*electorate vote*) und Parteilisten-Stimme (*list vote*). (3) Die Wahlkreise dürfen in ihrer Größe nur um fünf Prozent vom nationalen Durchschnitt abweichen, ihre Einteilung obliegt einer unabhängigen Kommission unter Vorsitz eines Verfassungsrichters.

[68] Siehe *Lawrence R. Ernst* [20] über die juristischen Auseinandersetzungen in den USA.

Und unter allen Divisormethoden überzeugt die von Sainte-Laguë am meisten:

- Die Rechenvorschrift ist einfach: Teile! Und runde wie sonst auch!
- Die Mandatsverteilungen sind unverzerrt.
- Die Methode ist frei von den bekannten Paradoxien.
- Sie liegt den Idealansprüchen so nahe wie bei einer Divisormethode nur möglich.
- Sie macht die Erfolgswerte zweier Wählerstimmen so gleich wie möglich.
- Sie bringt die Erfolgswerte aller Wählerstimmen dem Ideal so nahe, wie es nur geht.

In der Divisormethode mit Standardrundung (Sainte-Laguë) steht ein Verrechnungsverfahren zur Verfügung, das den politisch-parlamentarischen Prozeß vor potentiellen Schwierigkeiten bewahrt, das plausibel zu erklären ist, das die beteiligten Gruppierungen neutral behandelt und das bestens mit dem Grundsatz der Erfolgswertgleichheit der Wählerstimmen harmoniert.

Nichts spricht dafür zuzuwarten, bis die Paradoxien der Quotenmethode mit Ausgleich nach größten Resten (Hare–Niemeyer) das System irgendwann kompromittieren.[69]

19. Quellennachweise

Bücher

[1] *Michel L. Balinski / H. Peyton Young.* Fair Representation—Meeting the Ideal of One Man, One Vote. New Haven, CT 1982.

[2] *Emil Hübner.* Wahlsysteme. Sechste Auflage. München 1984.

[3] *Klaus Kopfermann.* Mathematische Aspekte der Wahlverfahren—Mandatsverteilung bei Abstimmungen. Mannheim 1991.

[4] *Robert K. Merton.* On the Shoulders of Giants—A Shandean Postscript—The Post-Italianate Edition. Chicago 1993. Deutsche Übersetzung der Originalausgabe 1965: Auf den Schultern von Riesen—Ein Leitfaden durch das Labyrinth der Gelehrsamkeit. Frankfurt am Main 1980.

[5] *Dieter Nohlen.* Wahlrecht und Parteiensysteme. Leverkusen 1986.

[6] *George Pólya.* The Pólya Picture Album: Encounters of a Mathematician. Hg. *Gerald L. Alexanderson.* Boston 1987.

[7] *Donald G. Saari.* Geometry of Voting. Berlin 1994.

[8] *Rein Taagepera / Matthew S. Shugart.* Seats and Votes—The Effects and Determinants of Electoral Systems. New Haven, CT 1989.

[9] *Bernhard Vogel / Dieter Nohle / Rainer-Olaf Schultze.* Wahlen in Deutschland. Berlin 1971.

[10] *H. Peyton Young.* Equity—In Theory and Practice. Princeton, NJ 1994.

[69] Memento Murphy [69]: “If anything can go wrong, it will.”

Aufsätze

[11] *Michel L. Balinski / H. Peyton Young.* "The Quota Method of Apportionment." American Mathematical Monthly 82 (1975) 701–730.

[12] *Michel L. Balinski / H. Peyton Young.* "The Webster Method of Apportionment." Proceedings of the National Academy of Sciences of the United States of America 77 (1980) 1–4.

[13] *Michel L. Balinski / H. Peyton Young.* "Apportioning the United States House of Representatives." Interfaces 13 (1983) 35–43.

[14] *Michel L. Balinski / H. Peyton Young.* "The Apportionment of Representation." S. 1–29 in: Fair Allocation. Hg. *H. Peyton Young.* Proceedings of Symposia in Applied Mathematics 33. Providence, RI 1985.

[15] *Michel L. Balinski / Svetlozar T. Rachev.* "Rounding Proportions: Methods of Rounding." Mathematical Scientist 22 (1997) 1–26.

[16] *Eckart Bomsdorf.* "Ein neues Verfahren zur Umsetzung von Wählerstimmen in Mandate." Zeitschrift für Parlamentsfragen 18 (1987) 221–223.

[17] *Ladislaus von Bortkiewicz.* "Zur Arithmetik der Verhältniswahl." Sitzungsberichte der Berliner Mathematischen Gesellschaft 18 (1920) 17–24.

[18] *Gregor Dorfleitner / Maximilian Happacher / Thomas Klein / Friedrich Pukelsheim.* "Roundpro: An Emacs Lisp Implementation of Rounding Procedures." Report 347 (1996), 7 S. Institut für Mathematik, Universität Augsburg.

[19] *Gregor Dorfleitner / Thomas Klein.* "Rounding with Multiplier Methods: An Efficient Algorithm and Applications in Statistics." Statistical Papers 40 (1999) 000-000.

[20] *Lawrence R. Ernst.* "Apportionment Methods for the House of Representatives and the Court Challenges." Management Science 40 (1994) 1207–1227.

[21] *Erhard Fengler.* "Ein Verfahren der möglichst geringen Verfälschung des Wählerwillens bei der Zuweisung der Parlamentsmandate." Zeitschrift für Parlamentsfragen 19 (1988) 561–565.

[22] *Harald Gropp.* "On Configurations and the Book of Sainte-Laguë." Discrete Mathematics 186 (1998) 000–000.

[23] *Maximilian Happacher / Friedrich Pukelsheim.* "And Round the World Away." S. 93–108 in: Proceedings of the Conference in Honor of *Shayle R. Searle*, Ithaca 1996. Hg. Biometrics Unit, Cornell University. Ithaca, NY 1997.

[24] *Maximilian Happacher / Friedrich Pukelsheim.* "Rounding Probabilities: Unbiased Multipliers." Statistics & Decisions 14 (1996) 373–382.

[25] *Maximilian Happacher / Friedrich Pukelsheim.* "Rounding Probabilities: Maximum Probability and Minimum Complexity Multipliers." Journal of Statistical Planning and Inference 67 (1998) 000–000.

[26] *Thomas Hare.* "On the Application of a New Statistical Method to the Ascertainment of the Votes of Majorities in a More Exhaustive Manner." Journal of the Statistical Society of London 23 (1860) 337–356.

[27] *I. David Hill.* "Some Aspects of Elections—to Fill One Seat or Many." Journal of the Royal Statistical Society Series A 151 (1988) 243–275.

[28] *Edward V. Huntington.* "The Apportionment of Representatives in Congress." Transactions of the American Mathematical Society 30 (1928) 85–110.

[29] *Max Kaase.* "Personalized Proportional Representation: The 'Model' of the West German Electoral System." S. 155–164 in: Choosing an Electoral System—Issues and Alternatives. Hg. *Arend Lijphart / Bernard Grofman.* New York 1984.

[30] *Peter Kunth.* "Einige Anmerkungen zu den Hareschen Quotientenverfahren." Zeitschrift für Parlamentsfragen 22 (1991) 297–324.

[31] *Arend Lijphart.* "Degrees of Proportionality of Proportional Representations Formulas." S. 170–179 in: Electoral Laws and Their Political Consequences. Hg. *Bernard Grofman / Arend Lijphart.* New York 1986.

[32] *John Loosemore / Victor J. Hanby.* "The Theoretical Limits of Maximum Distortion: Some Analytic Expressions for Electoral Systems." British Journal of Political Science 1 (1971) 467–477.

[33] *William F. Lucas.* "The Apportionment Problem." S. 358–396 in: Political and Related Models. Hg. *Steven J. Brams / William F. Lucas / Philip D. Straffin, Jr.* New York 1983.

[34] *Horst Niemeyer / Gottfried Wolf.* "Über einige mathematische Aspekte bei Wahlverfahren." Zeitschrift für Angewandte Mathematik und Mechanik 64 (1984) T340–T343.

[35] *Dieter Nohlen.* "Changes and Choices in Electoral Systems." S. 217–224 in: Choosing an Electoral System—Issues and Alternatives. Hg. *Arend Lijphart / Bernard Grofman.* New York 1984.

[36] *Georg Pólya.* I: "Über Sitzverteilung bei Proportionalwahlverfahren." Schweizer Zentralblatt für Staats- und Gemeinde-Verwaltung 20 (1919) 1–5. II: "Über die Verteilungssysteme der Proportionalwahl." Zeitschrift für Schweizerische Statistik und Volkswirtschaft 54 (1918) 363–387. III: "Über die Systeme der Sitzverteilung bei Proportionalwahl." Wissen und Leben [Neue Schweizer Rundschau] 12 (1918) 307–312.

[37] *Georg Pólya.* "Proportionalwahl und Wahrscheinlichkeitsrechnung." Zeitschrift für die gesamte Staatswissenschaft 74 (1919) 297–322.

[38] *Friedrich Pukelsheim.* "Efficient Rounding of Sampling Allocations." Statistics & Probability Letters 35 (1997) 141–143.

[39] *Friedrich Pukelsheim / Sabine Rieder.* "Efficient Rounding of Approximate Designs." Biometrika 79 (1992) 763–770.

[40] *Heinrich Rühle.* "D'Hondt–St.Laguë statt d'Hondt-original: Ein Beitrag zur Wahl- und Chancengleichheit für Bürger und Parteien." Zeitschrift für Parlamentsfragen 9 (1978) 405–414.

[41] *André Sainte-Laguë.* "La Représentation Proportionnelle et les Mathématiques." Revue Générale des Sciences Pures et Appliquées 21 (1910) 846–852.

[42] *André Sainte-Laguë.* "La Représentation Proportionnelle et la Méthode des Moindres Carrés." Annales Scientifiques de l'École Normale Supérieure 27 (1910) 529–542. Abstrakt in: Comptes Rendus Hebdomadaires des Séances de l'Académie des Sciences 151 (1910) 377–378.

[43] *Rainer-Olaf Schultze / Jürgen Ender.* "Aus aktuellem Anlaß: Bayerns Wahlsystem—verfassungspolitisch bedenklich?" Zeitschrift für Parlamentsfragen 22 (1991) 150–160.

[44] *Dolf Sternberger.* "Das deutsche Wahlwunder." S. 117–130 in: *Dolf Sternberger*, Die große Wahlreform—Zeugnisse einer Bemühung. Köln 1964.

[45] *Stephen M. Stigler.* "Stigler's Law of Eponymy." S. 147–157 in: Science and Social Structure: A Festschrift for *Robert K. Merton.* Transactions of the New York Academy of Sciences II 39. New York 1980.

[46] *Adolf Tecklenburg.* "Das d'Hondtsche Proportionalwahlverfahren in seiner praktischen Bedeutung." Zeitschrift für die gesamte Staatswissenschaft 64 (1908) 151–162.

[47] *Howard Wainer.* "Visual Revelations: Rounding Tables." Chance 11 (1998) 46–50.

[48] *Gerhard Zech.* "Benachteiligung kleiner Parteien durch das Bayerische Landeswahlgesetz." Zeitschrift für Parlamentsfragen 23 (1992) 362–376.

Andere Veröffentlichungen

[49] Biografische Index van de Benelux. Band 2. Bearb. von *Willemina van der Meer*. München 1997.

[50] British Biographical Index. Band 2. Bearb. von *David Bank / Anthony Esposito*. London 1990.

[51] Commonwealth of Massachusetts v. Mosbacher. 785 F.Supp. 230 (D.Mass. 1992). S. 230–271 in: West's Federal Supplement 785. St. Paul, MN 1992.

[52] Das Parlament—Die Woche in Bundeshaus. Nr. 9–10 vom 20./27. Februar 1998.

[53] Datenhandbuch zur Geschichte des Deutschen Bundestages 1949 bis 1982. Dritte Auflage. Verf. und bearb. von *Peter Schindler*. Baden-Baden 1984.

[54] Datenhandbuch zur Geschichte des Deutschen Bundestages 1983 bis 1991. Verf. und bearb. von *Peter Schindler*. Baden-Baden 1994.

[55] Die Kommunalwahlen am 12. März 1989. Hessisches Statistisches Landesamt: Beiträge zur Statistik Hessens, Neue Folge 230. Wiesbaden 1989.

[56] Die Wahl zum 2. Deutschen Bundestag am 6. September 1953. Statistik der Bundesrepublik Deutschland 100. Stuttgart 1954.

[57] Entscheidungen des Bundesverfassungsgerichts. Tübingen 1952*ff*.

[58] Everything You Need to Know about Voting Under MMP: New Zealand's Electoral System. Hg. Electoral Commission. Wellington 1996.

[59] For All Practical Purposes—Introduction to Contemporary Mathematics. Fourth Edition. Consortium for Mathematics and Its Applications (U.S.), Project Director *Solomon Garfunkel*. New York 1996.

[60] Index Biographique Français. Zweite Ausgabe. Band 7. Bearb. von *Tommaso Nappo*. München 1998.

[61] Mitgliederverzeichnis der Deutschen Mathematiker-Vereinigung e.V. 1997. Berlin 1998.

[62] Report of the Royal Commission on the Electoral System: Towards a Better Democracy. Hg. Electoral Commission. Wellington 1986, 1997.

[63] Sammlung von Entscheidungen des Bayerischen Verwaltungsgerichtshofs, mit Entscheidungen des Bayerischen Verfassungsgerichtshof und des Bayerischen Dienstgerichtshofs für Richter. Neue Folge 45. München 1992.

[64] United States Department of Commerce v. Montana. 112 S.Ct. 1415 (1992). S. 1415–1430 in: West's Supreme Court Reporter 112A. St. Paul, MN 1996.

[65] Wahlen in Bayern 1946–1990. Bayerisches Landesamt für Statistik und Datenverarbeitung: Beiträge zur Statistik Bayerns 493. München 1993.

[66] Wahlen zum 13. Deutschen Bundestag in Bayern am 16. Oktober 1994. Bayerisches Landesamt für Statistik und Datenverarbeitung: Beiträge zur Statistik Bayerns 494. München 1995.

Internetquellen (Stand Mai 1998)

[67] `www.elections.govt.nz` (Elections NZ Web Page)

[68] `www.fec.gov/pubrec/tcontent.htm` (Federal Election Commission der USA)

[69] `www.geocities.com/Paris/LeftBank/5674/murphy-true.html` (Murphy's Law)

[70] `www.statistik-bund.de/wahlen` (Der Bundeswahlleiter)

[71] `www.statistik-bund.de/wahlen/rechtsgr/bwg.htm` (Bundeswahlgesetz)

[72] `www1.math.uni-augsburg.de/sta/roundpro/description.html` (Emacs-Lisp Programm zu [18])

[73] `www1.math.uni-augsburg.de/sta/reports/` (Dieser Aufsatz und andere)